理学部 ［センター試験併用］ 数学

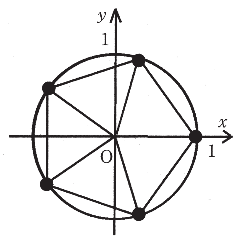
試験時間 90分

【注　意　事　項】

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**
2　**問題冊子に受験番号，氏名を記入しなさい。**
3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
4　**記述式の問題です。解答は解答欄の枠内におさまるように記入しなさい。**
解答用紙（3枚）には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，正しく記入しなさい。
(1)　**氏名欄**
　　氏名・フリガナを記入しなさい。
(2)　**受験番号欄**
　　受験番号を記入しなさい。
5　問題冊子の計算用紙および余白等は適宜利用してかまいませんが，どのページも切り離してはいけません。
6　試験終了後，解答用紙・問題冊子とも回収しますので**持ち帰ってはいけません。**

I　次の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ にあてはまる最も適切な数を答えなさい。

(1)　$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を計算するために，図のように，原点を中心とする半径1の円に内接する正5角形を考える。その5つの頂点の座標は，$\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}n\right),\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}n\right)\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ と表すことができる。図を見ると，各頂点の x 座標，y 座標の平均値はともにゼロになることが分る。特に x 座標の平均値に注目すると，



$$\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}{5}=\frac{\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+\cos\frac{10\pi}{5}}{5}=0$$

つまり，

$$\boxed{\text{ア}}\cos\frac{2\pi}{5}+\boxed{\text{イ}}\cos\frac{4\pi}{5}+1=0$$

$\cos\dfrac{2\pi}{5}=t$ とおくと，上式は

$$\boxed{\text{ウ}}\,t^2+\boxed{\text{エ}}\,t-1=0$$

に等しい。この方程式の解は，$0<t<1$ を考慮して，

$$t=\boxed{\text{オ}}$$

これが $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値である。

(2)　$F=-\sin\theta\sin2\theta-\cos2\theta+2\cos\theta+\dfrac{1}{2}$ の最大値と最小値を求めよう。

ただし，$\dfrac{1}{6}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ とする。したがって，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

$\cos\theta=u$ とおいて，F を u の多項式として表すと，

$$F=\boxed{\text{カ}}\,u^3+\boxed{\text{キ}}\,u^2+\boxed{\text{ク}}\,u+\boxed{\text{ケ}}$$

F を u の関数として考えて，u で微分して増減を調べると，$u=\boxed{\text{コ}}$ で F は極大値をとり，$u=\boxed{\text{サ}}$ で極小値をとる。F の最小値は，$\boxed{\text{シ}}$ である。

II　次の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまる，最も適した数を答えなさい。ただし，答えが有理数になる場合は，既約な形で答えること。

n を任意の整数値とするとき，関数 $f_n(x)=(x-n)^2-8$ を考えよう。

(1)　関数 $f_n(x)$ の，区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{4}{3}$ における最大，最小値について考える。

(a)　$f_0(x)$ は $x=\boxed{\text{ア}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(b)　$f_1(x)$ は $x=\boxed{\text{オ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{カ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ク}}$ をとる。

(c)　$f_2(x)$ は $x=\boxed{\text{ケ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。

(d)　変数 x の範囲に制限がないとき，$f_n(x)=0$ となるのは $x=n\pm\boxed{\text{ス}}$ のときである。したがって，この区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{4}{3}$ における $f_n(x)$ の最大，最小値がともに正の値になるのは $n\geqq\boxed{\text{セ}}$，および $n\leqq\boxed{\text{ソ}}$ の場合であることがわかる。

(2)　$f_n(x)$ と $f_{n+1}(x)$ は，$n=\boxed{\text{タ}}$ のとき区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{4}{3}$ において共有点 $x_c=\boxed{\text{チ}}$ をもち，このとき $f_n(x_c)=\boxed{\text{ツ}}$ である。

Ⅲ　次の文中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ にあてはまる，最も適した数値または数式をそれぞれの解答欄に書きなさい。

(A)　数列 k_1，k_2，k_3，… は既知の与えられた数列である。以下のような漸化式で定義される数列 x_0，x_1，x_2，… を考える。

$$x_{n+1} = k_n x_n + x_{n-1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (1)$$

この漸化式により，数列 $\{x_n\}$ は2つの初期値 x_0，x_1 を指定すれば，以後の項はただ一通りに決まってしまう。

実際，最初のいくつかを計算すれば

$$x_2 = \boxed{\text{ア}}\,x_1 + \boxed{\text{イ}}\,x_0$$
$$x_3 = \boxed{\text{ウ}}\,x_1 + \boxed{\text{エ}}\,x_0$$
$$x_4 = \boxed{\text{オ}}\,x_1 + \boxed{\text{カ}}\,x_0$$

のように，x_0，x_1 に適当な係数（それら自身は k_1，k_2，k_3，… で表わされた数式である）を掛けて加えたものとして与えられる。これを一般に

$$x_n = a_n x_1 + b_n x_0\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \qquad (2)$$

と書こう。ただし，上式が $n = 0$，1 でも意味を持つように $a_0 = 0$，$b_0 = 1$，$a_1 = 1$，$b_1 = 0$ と考えるものとする。

以下では，式 (2) の第1項の係数 a_n を計算する一般的な方法を求めたい。そのために，係数 a_n は，初期条件として $x_0 = 0$，$x_1 = 1$ としたときの x_n に他ならないことに注意しよう。すなわち，式 (1) より数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = k_n a_n + a_{n-1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (3)$$

によって決定される。

(B)　式 (3) について一般的な場合を議論する前に，与えられた数列 $\{k_n\}$ がすべて一定値 $k_n = 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ という特別な場合（すなわち $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$）について調べてみよう。この場合，これらの数列は $a_0 = 0$，$a_1 = 1$ に続いて

$a_2 = \boxed{\text{キ}}$，$a_3 = \boxed{\text{ク}}$，$a_4 = \boxed{\text{ケ}}$，$a_5 = \boxed{\text{コ}}$，$a_6 = \boxed{\text{サ}}$，$a_7 = \boxed{\text{シ}}$

などと順番に求められる。

(C)　改めて一般の数列 $\{k_n\}$ の場合に戻ると，(A) の計算例から，$n \geqq 2$ のときの n 番目の係数 a_n は数列 $\{k_n\}$ の初めの $n-1$ 個の k_1，…，k_{n-1} に依存して決まることがわかる。そこで

$$a_{n-1} = \langle\!\langle k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-2} \rangle\!\rangle$$
$$a_n = \langle\!\langle k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-2},\ k_{n-1} \rangle\!\rangle$$
$$a_{n+1} = \langle\!\langle k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-2},\ k_{n-1},\ k_n \rangle\!\rangle$$

という記号法を導入しよう。ここで，2重括弧は，括弧内にある変数に依存し，以下に述べるある規則によって決まる数を意味している。

この記号法を使えば，漸化式 $a_{n+1} = k_n a_n + a_{n-1}$ は

$$\langle\!\langle k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-2},\ k_{n-1},\ k_n \rangle\!\rangle =$$
$$\langle\!\langle k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-2},\ k_{n-1} \rangle\!\rangle \cdot k_n + \langle\!\langle k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-2} \rangle\!\rangle \qquad (4)$$

と書ける。この等式は，『左辺の2重括弧内の一番最後の項 k_n を外に取り出して，右辺第1項のようにしたとき，右辺第2項のような $n-2$ 個の k_1，…，k_{n-2} に依存して決まる項を付け加えれば両辺が等しくなる』という「最後の項の取り出し操作」における漸化的な規則を与えていると解釈できる。

式 (3) あるいは式 (4) を用いれば，初期条件 $a_0 = 0$，$a_1 = 1$ から

$$a_2 = \langle\!\langle k_1 \rangle\!\rangle = \boxed{\text{ス}}$$
$$a_3 = \langle\!\langle k_1,\ k_2 \rangle\!\rangle = \boxed{\text{セ}}$$

に続いて

$$a_4 = \langle\!\langle k_1,\ k_2,\ k_3 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle k_1,\ k_2 \rangle\!\rangle \cdot k_3 + \langle\!\langle k_1 \rangle\!\rangle = \boxed{\text{ソ}}$$
$$a_5 = \langle\!\langle k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle k_1,\ k_2,\ k_3 \rangle\!\rangle \cdot k_4 + \langle\!\langle k_1,\ k_2 \rangle\!\rangle = \boxed{\text{タ}}$$

などと順番に求められる。

当然ながら，(A) で求めた x_1 の各係数はこれらに一致している。また，すべての $k_n = 1$ と置けば，(B) の結果も再現している。