2 Fourier 解析

この章では、周期関数の Fourier 級数展開およびその極限としての Fourier 変換を考察する。これらの考え方は物理学の様々な場面で登場する。

2.1 Fourier 級数展開

2.1.1 Fourier 級数

指数関数 $e^{i\frac{n\pi}{L}x},\ n\in\mathbb{Z}$ は実軸上で周期 $2L$ をもつ。これを用いれば、実軸上で周期 $2L$ をもつ関数 $f(x)$ は一般に

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

のように関数項級数展開されることが期待される。これを $f(x)$ の Fourier 級数展開、また複素係数 c_n は Fourier 係数という。言い換えれば、ある周期関数 $f(x)$ を波数 $n\pi/L$ を持つ「波」の重ね合わせで表したいのである。ここで Euler の公式を用いれば、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_ne^{i\frac{n\pi}{L}x}=c_0+2\sum_{n\geq1}(c_n+c_{-n})\cos\frac{n\pi}{L}x+2i\sum_{n\geq1}(c_n-c_{-n})\sin\frac{n\pi}{L}x$$

であるから、もし $c_{-n}=\bar{c}_n$ ならば $c_n+c_{-n}=c_n+\bar{c}_n\in\mathbb{R}$ および $i(c_n-c_{-n})=i(c_n-\bar{c}_n)\in\mathbb{R}$ であり、周期 $2L$ をもつ実関数は、実係数 a_n および b_n を用いて

$$\sum_{n\geq0}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+\sum_{n\geq1}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

のように展開できることも期待される。特に偶関数は $b_n=0$、奇関数は $a_n=0$ によって表され、それぞれ Fourier 余弦級数、Fourier 正弦級数という。

正規直交基底 最初に考えた指数関数列 $\{e^{i\frac{n\pi}{L}x}|\ n\in\mathbb{Z}\}$ は、規格化因子 $1/\sqrt{2L}$ および関数の内積 $(f,g):=\int_{-L}^{L}f^*(x)g(x)dx$ のもとで正規直交基底を成すことが

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}e^{i\frac{m\pi}{L}x},\frac{1}{\sqrt{2L}}e^{i\frac{n\pi}{L}x}\right)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}e^{i(n-m)\frac{\pi}{L}x}dx=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

のように示される。したがって $\phi_n(x):=e^{i\frac{n\pi}{L}x}/\sqrt{2L}$ のとき、$(\phi_m,\phi_n)=\delta_{mn}$ がいえた。この正規直交基底を用いれば、ある周期関数が $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\phi_n(x)$ と展開できるとき、各 Fourier 係数は

$$c_n=(\phi_n,f(x))=\frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}dx$$

で与えられることがわかる。

完全性 ベクトルのノルム（絶対値）との類推から、関数 $f(x)$ のノルム（の 2 乗）を $||f||^2:=|(f(x),f(x))|$ と定義する。もし周期 $2L$ をもつ任意の関数について Parseval の等式

$$||f||^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|(\phi_n,f(x))|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$$

が成立すれば、正規直交基底 $\{\phi_n\}$ は完全（完全正規直交基底）であるという。つまり完全系とは任意の周期関数が $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\phi_n(x)$ と展開できるような基底であり、実際ここで定義した $\{\phi_n\}$、および関数列

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}},\ \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi}{L}x,\ \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x\ \middle|\, n\geq1\right\}$$

は完全正規直交基底であることを示すことができる。しかし、与えられた周期関数 $f(x)$ とその Fourier 級数展開がすべての x において一致するかどうかは微妙な問題である。

2.1.2 いろいろな周期関数の展開

Fourier 級数展開の構造を具体的な例を用いて考える。ここで取り扱うのは、区間 $[-L,L]$ で 2 乗可積分であり、かつ有限個の点を除いて連続であるような関数である。後ほど正確な定義を与えるが、これらを区分的に連続な関数ということにする。

例：　　周期関数 $f(x)=|x|,\ (-L\le x\le L)$ は実周期関数であり偶関数だから Fourier 余弦級数によって

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2L}}a_0+\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n>0}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x$$

のように展開できる。各 Fourier 係数は

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{L}|x|dx=\frac{2}{\sqrt{2L}}\int_0^L xdx=\frac{L^2}{\sqrt{2L}}\\
a_n&=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L}^{L}|x|\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{\sqrt{L}}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{\sqrt{L}}\left(\frac{L}{n\pi}x\sin\frac{n\pi}{L}x\,\Big|_0^L-\frac{L}{n\pi}\int_0^L\sin\frac{n\pi}{L}xdx\right)\\
&=\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{L}x\,\Big|_0^L=\frac{2}{\sqrt{L}}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2((-1)^n-1)=\frac{2}{\sqrt{L}}\times\left\{\begin{array}{cc}-2\left(L/n\pi\right)^2 & \text{for odd } n\\ 0 & \text{for even } n\end{array}\right.
\end{aligned}$$

のように求まるから、

$$f(x)=\frac{L^2}{2L}-\frac{4}{L}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{2k+1}{L}\pi x$$

が得られる。この結果に $x=0$ を代入すれば、

$$0=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

がわかる。

例：　　次のような周期 $2L$ の実関数

$$f(x)=\left\{\begin{array}{cc}1 & 0<x<L\\ -1 & -L<x<0\end{array}\right.$$

は原点および $\pm L$ において不連続性をもつが、これは奇関数であるから Fourier 正弦関数によって

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{n>0}a_n\sin\frac{n\pi}{L}x$$

のように展開できるはずである。各 Fourier 係数は

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^L\sin\frac{n\pi}{L}xdx+\frac{1}{\sqrt{L}}\int_{-L}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{2}{\sqrt{L}}\int_0^L\sin\frac{n\pi}{L}xdx\\
&=-\frac{2\sqrt{L}}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\,\Bigg|_0^L=\frac{2\sqrt{L}}{n\pi}(1-(-1)^n)=\frac{2\sqrt{L}}{n\pi}\times\left\{\begin{array}{cc}2 & \text{for odd } n\\ 0 & \text{for even } n\end{array}\right.
\end{aligned}$$

のように計算できるから、

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{L}x=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{L}x+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{L}x+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{L}x+\cdots\right)$$

がわかる。

不連続点のふるまい　　ここで改めて言葉を定義する。関数 $f(x)$ の不連続点 $x=a$ において極限値 $f(a+0)$ および $f(a-0)$ が存在するとき、$f(x)$ を区分的連続関数という。また、区分的になめらかとは $f(x)$ および $f'(x)$ が共に区分的連続であることである。ここで考えた例はいずれも区分的になめらかな関数であることは明らかである。

さて最後の例において、右辺の級数展開に $x=0$ を代入するとすべての項は 0 であるから、$f(0)=0$ となっていることが分かる。これは元の関数の $f(+0)=1,\ f(-0)=-1$ の平均値になっているが、実は一般に区分的になめらかな関数の Fourier 級数展開は、元の関数の不連続点 $x=a$ において $\frac{1}{2}\left(f(a+0)+f(a-0)\right)$ に収束することを示すことができる。この表式はもちろん関数の連続点においても有効であるから、区分的になめらかな関数をある正規直交基底 $\{\phi_n\}$ によって Fourier 級数展開したとき、その Fourier 係数を c_n とすれば

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\phi_n(x)=\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$$

が成立していることが分かる。

■第 9 回

2.2 Fourier 積分

2.2.1 Fourier 変換および逆変換

以上の考察を、必ずしも周期関数ではない関数も取り扱えるように拡張する。周期 $2L$ をもつ区分的になめらかな関数の Fourier 級数展開とその Fourier 係数は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{ik_n x}, \quad c_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x}, f\right) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik_n x} dx$$

で与えられた。ここで、$k_n = n\Delta k,\ \Delta k = \pi/L$ とおいた。周期をもたない関数とは、無限周期をもつ関数と考えることができるから、$L \to \infty$ を取ることを考える。周期 $2L$ の場合、「波数」の間隔 $\Delta k = k_{n+1} - k_n = \pi/L$ は離散的であるが、$L \to \infty$ の極限では $\Delta k \to 0$ となり、波数 k は連続変数となると考えるのが自然である。したがって、この極限で波数 k_n についての Fourier 級数展開は k についての積分で表される。このためにまず $\tilde{c}(k_n) := \sqrt{\frac{2L}{2\pi}} c_n$ を定義して展開式に代入し、極限を取れば無限和は Riemann 積分に移行して、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{ik_n x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}(k_n) \underbrace{\frac{2\pi}{2L}}_{=\Delta k} e^{ik_n x} \xrightarrow[L\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}(k) e^{ikx} dk$$

となる。この右辺を Fourier 積分という。一方、逆に

$$\tilde{c}(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik_n x} dx \xrightarrow[L\to\infty]{} \tilde{c}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-ikx} dx$$

もわかるが、この $\tilde{c}(k)$ を $f(x)$ の Fourier（積分）変換と呼び、$\tilde{c}(k) = \hat{f}(k)$ と書くことが多い。また

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

を $\hat{f}(k)$ の逆 Fourier 変換と呼ぶ。なお、Fourier 変換と逆変換は指数 ikx の符合が違うだけであるから、形式的に $\hat{f}^{-1}(k) = \hat{f}(-k)$ が成り立つ。これを Fourier 変換の相反性という。

関数 $f(x)$ が $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ を満たすとき、つまり絶対値の積分値が収束するとき、$f(x)$ は絶対可積分という。共に絶対可積分であるような $f(x)$ およびその Fourier 変換 $\hat{f}(k)$ に対して、それを再び逆 Fourier 変換した関数を $\check{f}(x)$ と書くことにすれば、Fourier 級数展開のときと同様に

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2} \left(f(x+0) + f(x-0) \right)$$

となることが示せる。（ただし、実際には絶対可積分性は必要条件ではない。）したがって、Fourier 変換と逆変換を続けて行なえば、元の関数 $f(x)$ はほとんどすべての点で再現されることがわかる。これを Fourier の積分公式という。

Fourier 変換および逆変換の具体例を見ることにより、その諸性質を考える。

例： 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

の Fourier 変換 $\hat{f}(k)$ を求める。元の関数は偶関数だから

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-a}^{a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ka}{k}$$

はすぐにわかる。これを逆 Fourier 変換してみよう。まず

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{k} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \left(e^{ik(x+a)} - e^{ik(x-a)} \right) dk$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \left\{ \left(e^{ik(x+a)} - 1 \right) - \left(e^{ik(x-a)} - 1 \right) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \left\{ \sin k(x+a) - \sin k(x-a) \right\}$$

となる。ここで、発散を回避するため被積分関数に $-1/k+1/k$ を挿入し、奇関数の積分は 0 になることを用いている。さて、Cauchy の定理より $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=\pi$ であったから、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\xi}{\xi}d\xi=\begin{cases}\pi & \alpha>0\\ -\pi & \alpha<0\end{cases}$$

がいえる。次に符合関数 $\operatorname{sgn}\alpha=\pm1$ を導入すれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k}\left\{\sin k(x+a)-\sin k(x-a)\right\}=\left(\operatorname{sgn}(x+a)-\operatorname{sgn}(x-a)\right)\pi=\begin{cases}2\pi & |x|<a\\ \pi & |x|=a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

のようになり、

$$\check{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}dk=\begin{cases}1 & |x|<a\\ 1/2 & |x|=a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$$

がわかる。したがって、Fourier の積分公式が確認できた。

Fourier 変換 $\hat{f}(k)$ の a 依存性を考えよう。まず、$\hat{f}'(k)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{ak\cos ak-\sin ak}{k^2}$ であるから、$k=0$ では

$$\lim_{k\to0}\hat{f}'(k)=\lim_{k\to0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{ak\cos ak-\sin ak}{k^2}=\lim_{k\to0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a\cos ak-a^2k\sin ak-a\cos ak}{2k}=0$$

となって、$\hat{f}(k)$ は $k=0$ で極値（実際は極大値）をとることがわかる。次に、

$$\hat{f}(k)\sim\frac{\sin ak}{k}=\frac{1}{k}\left(ak-\frac{1}{3!}(ak)^3+\cdots\right)=a-\frac{1}{3!}a^3k^2+\cdots$$

であるから、$k=0$ の付近では a の値が大きいほど $\hat{f}(k)$ のピークが高いこともわかる。したがって、$f(x)$ が 0 でない領域が広いとき、それを波の重ね合わせで表現すると、小さい波数 k の寄与が支配的であることが分かる。一方、a が小さく関数値が 0 でない領域が狭いときには、逆に大きい波数の寄与まで考慮する必要があることも分かる。この現象に関しては、後にデルタ関数を導入するときに再び考察する。

■第 10 回

Riemann-Lebesgue の定理 ここまで見てきたように、関数 $f(x)$ の Fourier 変換とは波数が連続的な値をとる波への分解であり、$\hat{f}(k)$ はその波数 k 成分である。ここでは絶対値が大きな波数、つまり短い波長の成分の振る舞いについて考えよう。直前の例においては $\hat{f}(k)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin ka}{k}$ であったが、

$$\lim_{k\to\infty}|f(k)|\sim\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\sin ka}{k}\right|<\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|k|}=0$$

であるから、大きい波数の成分は徐々に減少し、いずれ 0 に収束することが分かる。実は、一般に絶対可積分関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(k)$ に対して

$$\lim_{k\to\pm\infty}\hat{f}(k)=0$$

を示すことができる。これを Riemann-Lebesgue の定理という。

例： 関数 $f(x)=e^{-a|x|},\ (a>0)$ の Fourier 変換を求める。

$$\begin{aligned}\hat{f}(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty}e^{-(a+ik)x}dx+\int_{-\infty}^{0}e^{(a-ik)x}dx\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-1}{a+ik}e^{-(a+ik)x}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{a-ik}e^{(a-ik)x}\Big|_{-\infty}^{0}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a+ik}+\frac{1}{a-ik}\right)\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}\end{aligned}$$

したがって、$\lim_{k\to\pm\infty}\hat{f}(k)=0$ が確かめられるが、この場合 $f(x)$ が絶対可積分であることは容易に示される。

微分と積分の順序交換 関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(k)$ が分かっているとき、$x^nf(x)$ の Fourier 変換を簡潔に求められる場合がある。

例： 関数

$$f_n(x)=x^ne^{-a|x|},\quad n=0,1,2,\ldots$$

の Fourier 変換 $\hat{f}_n(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^ne^{-a|x|}e^{-ikx}dx$ を求める。先ほどの例から、

$$\hat{f}_0(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-ikx}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}$$

だから、左辺を波数 k によって微分してみると、微分と積分の順序が交換できるとすれば

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial k}\hat{f}_0(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\frac{\partial}{\partial k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-ikx}dx&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}i\frac{\partial}{\partial k}e^{-ikx}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-a|x|}e^{-ikx}dx=\hat{f}_1(k)\end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\hat{f}_1(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)\frac{a}{a^2+k^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-2iak}{(a^2+k^2)^2}$$

がわかる。さらに繰り返し微分することにより

$$\hat{f}_n(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^ne^{-a|x|}e^{-ikx}dx=\left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)^n\hat{f}_0(k)$$

がいえる。ここでは微分と積分の順序交換ができるとしたことが本質的であったが、これは必ずしもできるとは限らない。詳細はこの講義の程度を超えるので省略する。

2.2.2 たたみ込み

たとえば「粒子」が x 軸上をある確率分布に従って時間とともに移動しているとする。初め原点にいた粒子が、ある時間 τ 経った後に、位置 y と $y+dy$ の間にいる確率が $p_\tau(y)dy$ であったとすれば、時間 $t>\tau$ 後に位置 x と $x+dx$ 間にいる確率は $\int_{y=-\infty}^{\infty}p_{t-\tau}(x-y)dx\cdot p_\tau(y)dy$ で与えられるはずである。一方、これは $p_t(x)dx$ とも書かれるべき量であるから

$$p_t(x)dx=\int_{y=-\infty}^{\infty}p_{t-\tau}(x-y)p_\tau(y)dydx\ \Leftrightarrow\ p_t(x)=\int_{y=-\infty}^{\infty}p_{t-\tau}(x-y)p_\tau(y)dy$$

が成り立つ。ここで現れた、$\displaystyle\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy =: (f*g)(x)$ の形の積分をたたみ込み (convolution) とよび、右辺のように表記する。

たたみ込みと Fourier 変換 関数同士のたたみ込みで作られた新しい関数の Fourier 変換を考える。積分の順序は交換できるものとすれば

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}\left(\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy\right)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y=-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}dy\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ik(x-y)}dx \\ &= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y=-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}dy\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ik(x')}dx'\right) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(k)\hat{g}(k)\end{aligned}$$

となって、2 つの関数のたたみ込みの Fourier 変換は、それぞれの関数の Fourier 変換の積で与えられることが分かる。

例： 典型的な確率分布関数である Gauss 分布関数を考えよう。平均値はともに 0、分散はそれぞれ $1/a$ および $1/b$ であるような、規格化された分布関数をそれぞれ $f_a(x),\ f_b(x)$ とすると、それらは

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}e^{-\frac{a}{2}x^2},\ f_b(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}}e^{-\frac{b}{2}x^2}$$

のように与えられる。これらのたたみ込みは定義に従って計算すれば

$$f_a*f_b(x) = \sqrt{\frac{ab}{2\pi(a+b)}}e^{-\frac{ab}{2(a+b)}x^2}$$

となり、平均値および分散が $0,\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ をもつ Gauss 分布になることが示せる。ここで、Gauss 積分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ の値が $I = \sqrt{\pi/\alpha}$ であることを用いた。このように、たたみ込みに対して関数形を変えないような分布を安定分布とよぶ。

次に、今後量子力学等で多用する Gauss 分布関数の Fourier 変換を求めておこう。

$$\hat{f}_a(k) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{a}{2}x^2+ikx\right)}dx = \frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(x^2+\frac{2ik}{a}x\right)}dx = \frac{\sqrt{a}}{2\pi}e^{-\frac{k^2}{2a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{ik}{a}\right)^2}dx$$

となるが、最後の定積分は正則関数を実軸に平行な経路で積分したものと見なすことができるから、積分路変形の原理を用いれば、

$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{ik}{a}\right)^2}dx + \int_{y=0}^{k/a} e^{-\frac{a}{2}\left(-R+iy+\frac{ik}{a}\right)^2}idy + \int_{y=0}^{k/a} e^{-\frac{a}{2}\left(R+iy+\frac{ik}{a}\right)^2}idy$$

がいえる。ここで $R\to\infty$ をとれば、右辺の 2 項目と 3 項目の被積分関数は 0 となり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}\left(x+\frac{ik}{a}\right)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

したがって、$\hat{f}_a(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{2a}}$ であり、分散 $1/a$ の Gauss 分布の Fourier 変換は、分散 a の Gauss 分布に比例することがわかった。

■第 11 回

2.2.3 デルタ関数

Fourier の積分公式を関数 $f(x)$ の連続点において考える。Fourier 変換 $\hat{f}(k)$ を代入し、積分順序の変更を許せば

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}f(x')e^{-ikx'}dx'\right)e^{ikx}dk$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\lim_{L\to\infty}\left(\int_{-L}^{L}e^{ik(x-x')}dk\right)dx'$$

となるが、δ-関数の機能 $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\delta(x-x')dx'$ と比較すれば、これは

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk$$

と解釈できることを示している。これを δ-関数の定義とみなすことにして、$x'=0$ の場合を考えれば、$\delta(x)$ の Fourier 変換 $\hat{\delta}(k)$ は定義によって

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

のように定数関数である。$\delta(x)$ も定義により $1/\sqrt{2\pi}$ の逆 Fourier 変換であるから、いずれも絶対可積分ではないことがわかる。

この定義を用いれば、以前示した「関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込みの Fourier 変換はそれぞれの Fourier 変換の積になっていること」が簡潔に示せる。まず、

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx,\ \hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-ikx}dx,$$

であるから、積分順序の交換を許し、$\delta(-x)=\delta(x)$ であることを用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\hat{g}(k)e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')g(x'')e^{-ik(x'+x'')}e^{ikx}dx'dx''dk$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')g(x'')\delta(x-x'-x'')dx'dx'' = \int_{-\infty}^{\infty}f(x')g(x-x')dx' = f*g(x)$$

となり、$\hat{f}(k)\hat{g}(k)=\widehat{f*g}(k)$ が示せた。

Parseval の等式　この計算で、さらに $x=0$ とおけば、$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\hat{g}(k)dk=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')g(-x')dx$ となるが、ここで

$$\hat{f}^*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f^*(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f^*(-x)e^{-ikx}dx$$

であるから、$f^*(-x)$ の Fourier 変換は $\hat{f}^*(k)$ によって与えられる。したがって、$g(x)=f^*(-x)$ とおけば、2 乗可積分関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\hat{f}^*(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty}f(x')f^*(x')dx \;\Leftrightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2dk = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$$

が成立することがわかる。これは周期関数の展開に関する Parseval の等式の無限周期版である。

2.3 線形偏微分方程式への応用

Fourier 解析は物理学に現れるさまざまな線形偏微分方程式の解法において有効な手段を与える。

2.3.1 定数係数 2 階線形偏微分方程式

簡単のため、独立変数が 2 変数 x, y の場合を考える。偏微分方程式の階数とは各変数による微分の最高次のことと定義すれば、定数係数をもつ 2 階の線形偏微分方程式の一般形は、

$$\left(a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + c \right) u(x, y) = q(x, y)$$

となる。これらの方程式は $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ の値に応じてそれぞれ異なる特性をもち、

(a) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ のとき楕円型　例: Laplace 方程式
(b) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ のとき放物型　例: 熱伝導方程式
(c) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ のとき双曲型　例: 波動方程式

のように分類される。常微分方程式の場合と同様に、$q(x, y) = 0$ のとき同次方程式、$q(x, y) \neq 0$ のとき非同次方程式という。本節ではこれらの偏微分方程式の典型例とその解法を考える。

■**第 12 回**

2.3.2　波動方程式

弦を伝わる波など、空間 1 次元の波動は「変位」u について 2 階の双曲型偏微分方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

で記述される。ここで c は波の位相速度である。これを（1 次元）波動方程式とよぶ。

偏微分方程式の一般解とは、微分の階数だけの任意関数を含む解と定義される。この波動方程式については次のように一般解を求めることができる。まず独立変数 (t, x) を、新しい独立変数 $\xi := x + ct,\ \eta := x - ct$ に置換えれば、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right),\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{c}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

を用いて波動方程式は

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ \Leftrightarrow\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} u = 0$$

となる。この方程式には $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ という 2 つの任意関数をもつ解があることは容易に分かり、これが 1 次元波動方程式の一般解である。元の変数に戻せば、$u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct)$ と書くことができるが、各項の物理的意味は次の通りである。まず、$g = 0$ の場合 $f(x + ct)$ の同位相の位置（$x + ct = x_0$ としよう）の動きを見ると、変位が $f(x_0)$ の位置は速度 c で負の方向に移動することが分かる。これを左進行波とよぶ。逆に $f = 0$ の場合は、右進行波であることもすぐに分かる。したがって、1 次元波動方程式の一般解は左進行波 $f(x + ct)$ と右進行波 $g(x - ct)$ の線形結合であることが分かった。

固定端境界条件　両端が固定された弦を伝わる波のような、境界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ と初期条件 $u(x, 0) = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0$ を満たす解を求めよう。このために、まず $u(x, t)$ が x および t のみの関数の積になっていると考え、$u(x, t) = X(x)T(t)$ とおく。方程式に代入すれば、

$$\frac{1}{c^2}\ddot{T}X = TX'' \ \Leftrightarrow\ \frac{\ddot{T}}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$$

のような関係が得られる。最後の等式の左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数であるから、この等式が成立するには両辺が定数である必要がある。この定数を $-k^2$ とおくことにすれば、方程式は $X'' = -k^2 X$ および $\ddot{T} = -(ck)^2 T$ のように、それぞれの変数についての常微分方程式に分離することができる。これを変数分離法という。したがって、解は $X(x) = a\cos kx + b\sin kx$ および $T(t) = A\cos ckt + B\sin ckt$ のように与えられることがわかる。

次に波数 k のみたすべき条件を定めよう。境界条件 $X(0) = X(L) = 0$ より、$a = 0$ および $k = k_n := n\pi/L,\ n \in \mathbb{Z}_{>0}$ がすぐにわかり $X(x) = b_n \sin k_n x$ が得られる。一方、初期条件 $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ から $B = 0$、つまり $T(t) = A\cos ck_n t$ であることもすぐにわかる。こうして波数 k_n をもつ解は、b_n をある定数として

$$u(x, t) = b_n \sin k_n x \cos ck_n t$$

の形であることがわかった。

最後に初期条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$ から、定数 b_n を決定する。考えている偏微分方程式は線形方程式であるから、波数 k_n の解の重ね合わせができ、線形結合 $u(x, t) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin k_n x \cos ck_n t$ もまた元の方程式の解である。したがって、初期条件

$$u(x, 0) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \varphi(x)$$

を満たすように各定数 b_n を定めればよい。これは $\varphi(x)$ の Fourier 級数展開係数を求めることと等価なので、周期 $2L$ の Fourier 正弦級数の基底が満たす関係

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin k_n x \sin k_m x dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} \sin k_n x \sin k_m x dx = \delta_{nm}$$

から、

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx$$

であればよいことがわかる。ただし、この Fourier 級数が収束することは仮定する。

任意の境界条件 以上の考察からわかるように、空間方向に周期的な境界条件をもつとみなせる系に対する波動方程式の解法においては、変数分離法が有効である。この解法は、

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(t)e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

のように Fourier 級数展開の形を仮定し、t についての微分方程式を解く手続きと等価である。実際、この u を波動方程式に代入すれば、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{1}{c^2}\frac{d^2C_n}{dt^2}(t)+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n(t)\right\}e^{i\frac{n\pi}{L}x}=0$$

であるから、各 Fourier 係数について

$$\frac{d^2C_n}{dt^2}(t)+c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n(t)=0 \iff C_n(t)=\beta_n^+\exp\left\{ic\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\right\}+\beta_n^-\exp\left\{-ic\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\right\}$$

がわかる。したがって、最終的な結果は

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n^+\exp\left\{i\left(\frac{n\pi}{L}\right)(x+ct)\right\}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n^-\exp\left\{i\left(\frac{n\pi}{L}\right)(x-ct)\right\}$$

となり、与えられた境界条件・初期条件を満たすには適切にに定数 $\beta_n^{\pm}$ を選べばよい。ただし、ここでも Fourier 級数の収束は仮定している。

■**第 13 回**

2.3.3　熱伝導方程式

均質な物体を 1 方向に伝わる熱など、空間 1 次元の熱伝導は放物形の 2 階線形偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t)$$

に従う。ここで $u(x,t)$ は各時刻 t・位置 x における物質の温度であり、$\kappa > 0$ は熱伝導度により決まる定数、非同次項 $q(x,t)$ は熱源の存在を表す。これを熱伝導方程式というが、これはまた u を物質の密度（濃度）とみれば拡散の問題にも適用できることから、拡散方程式ともよばれる。

有限区間・周期系　有限な長さ L をもつ棒や、有限な厚み L をもつ一様な板を伝わる熱に対して、端における境界条件が与えられているとしよう。例えば両端が温度 $T\,^\circ\mathrm{K}$ の熱浴に接している場合には $u(0,t) = u(L,t) = T$、また両端が断熱的なら $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$ などのような境界条件が考えられる。また、長さ L の細い円環状の物体のような場合には、周期境界条件 $u(0,t) = u(L,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t)$ が与えられていると考えるのが適切であろう。

これらの問題に対しては、波動方程式の場合と同様に変数分離法が適用でき、適切な初期条件の下で解は Fourier 級数の形で表せる。

無限系　無限（あるいは半無限）の長さをもつ物体の熱分布は、初期条件 $u(x,0) = f(x)$ の下で熱伝導方程式を解くことにより求められる。この場合、x については Fourier 級数展開ではなく Fourier 積分の形で表すのが自然であるから、

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(t,\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

のように展開しよう（波数 k は κ と紛らわしいので ω を使った）。これを熱伝導方程式に代入すれば、波動方程式の場合と同様に各 Fourier 係数についての常微分方程式が得られ、$u(x,t)$ は

$$\frac{dC}{dt}(t,\omega) + \kappa\omega^2 C(t,\omega) = 0 \ \Rightarrow C(t,\omega) = c(\omega) e^{-\kappa\omega^2 t} \ \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-\kappa\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega$$

のように表せる。次に係数 $c(\omega)$ の関数形であるが、初期条件より

$$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x}$$

であるから、$c(\omega)$ は $f(x)$ の Fourier 変換により与えられることが分かる。したがって、

$$c(\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-i\omega x'}$$

が得られ、初期条件をみたす解は

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{i\omega(x-x')} e^{-\kappa\omega^2 t}$$

のように表せることが分かった。ここで、ω 積分と x' 積分の順序が交換できる場合を考えれば、$u(x,t)$ は

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',t) f(x') dx', \quad K(x-x',t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-\kappa\omega^2 t + i\omega(x-x')}$$

のようにたたみ込み積分の形で書くことができる。$K(x-x',t)$ は、初期 $(t=0)$ の x' における温度 $f(x')$ が、時刻 t において x に及ぼす影響を表す関数であり、初期値問題の Green 関数、あるいは基本解とよばれる。

$\boxed{\textsf{Green 関数}}$　初期値問題に対する Green 関数 $K(x-x',t)$ の関数形を求めよう。まず、被積分関数の指数を平方完成すれば

$$K(x-x',t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-\kappa t\left(\omega^2-i\omega(x-x')/\kappa t\right)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-\kappa t\left(\omega-i(x-x')/2\kappa t\right)^2}e^{-(x-x')^2/2\kappa t}$$
$$=\frac{1}{2\pi}e^{-(x-x')^2/2\kappa t}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-\kappa t\left(\omega-i(x-x')/2\kappa t\right)^2}$$

となるが、最後の定積分は以前求めた Gauss 積分であるから、積分値は $\sqrt{\pi/\kappa t}$ であり、

$$K(x-x',t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}e^{-(x-x')^2/4\kappa t}$$

がわかる。

例：　無限に長く均質な金属棒に、初期条件 $u(x,0)=\begin{cases} u_0 & |x|\le a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$ の熱分布が与えられたとき、$t>0$ における熱分布を求める。熱伝導方程式の解は、たたみ込み積分

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-x',t)u(x',0)dx'=u_0\int_{-a}^{a}K(x-x',t)dx'$$

で与えられるから、この定積分を実行すればよい。

■**第 14 回**

2.3.4　Laplace-Poisson 方程式

電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ のもとで、静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は Poisson 方程式とよばれる楕円形の 2 階線形偏微分方程式

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

をみたす。特に非同次項がない場合を Laplace 方程式という。ここで $\triangle = \sum_{j=1}^{D}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ は Laplacian である。

例　上半平面の電位：　空間 2 次元の場合を考える。境界条件 $\phi(x,0) = f(x)$ および $\lim_{y\to\infty}\phi(x,y) = 0$ のもとで、$y > 0$ の領域における静電ポテンシャルを求めよう。x 方向に Fourier 変換の形を仮定し、

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C_k(y)e^{ikx}dk$$

とおいて Laplace 方程式 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi = 0$ に代入すれば、$C_k''(y) - k^2C_k(y) = 0$ が得られ、これを解けば $C_k(y) = e^{-ky}$ または e^{ky} となる。したがって無限遠の境界条件を考慮すれば、

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty} c(k)e^{-ky}e^{ikx}dk + \int_{-\infty}^{0} c(k)e^{ky}e^{ikx}dk\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} c(k)e^{-|k|y}e^{ikx}dk$$

がわかる。ここで x 軸上の境界条件より、$u(x,0) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}c(k)e^{ikx}dk$ だから $c(k)$ は $f(x)$ の Fourier 変換により $c(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')e^{-ikx'}dx'$ と与えられ、積分順序が交換できれば

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dx' f(x')e^{-|k|y}e^{ik(x-x')} = \int_{-\infty}^{\infty}dx' f(x')G(x-x',y)$$

のように、ポテンシャルは境界値問題の Green 関数 $G(x-x',y)$ を用いてたたみ込み積分の形で表せる。

例　点電荷の電位：　3 次元空間における電位について考える。原点に点電荷 q があるとき、電荷分布はデルタ関数を用いて $\rho(x) = q\,\delta^3(\boldsymbol{r})$ と表せる。ここで $\delta^3(\boldsymbol{r}) := \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ とおいた。この点電荷による静電ポテンシャルを Poisson 方程式を解くことによって求めよう。

静電ポテンシャルを各方向について Fourier 積分で表すと、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k,\ (d^3k = dk_xdk_ydk_z)$$

となる。一方、Poisson 方程式 $\triangle\phi = -\rho/\epsilon_0$ の右辺のデルタ関数も Fourier 積分表示すれば

$$\delta^3(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k$$

であるから、各 Fourier 成分は

$$-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}k^2\hat{\phi}(\boldsymbol{k}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\ \Leftrightarrow\ \hat{\phi}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{q}{\epsilon_0}\frac{1}{k^2}$$

と求めることができる。ここで $k^2 := k_x^2+k_y^2+k_z^2$ とおいた。したがって、これを静電ポテンシャルの Fourier 積分表示に代入し、波数空間の積分を実行すればよい。

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\phi}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k = \frac{q}{\epsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{k^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k$$

であるから、波数空間における極座標を用いれば $d^3k = k^2dk\,d(\cos\theta)\,d\phi$ であるから

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{k^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k = \int_{k=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}e^{ikr\cos\theta}dkd(\cos\theta)d\phi = 2\pi\int_{k=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}e^{ikr\cos\theta}dkd(\cos\theta)$$
$$= 2\pi\int_{k=0}^{\infty}\frac{1}{ikr}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)dk = 4\pi\int_{k=0}^{\infty}\frac{\sin kr}{kr}dk = \frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\frac{\sin kr}{kr}d(kr) = \frac{2\pi^2}{r}$$

がわかる。ここで $|\boldsymbol{r}| = r$ とおき、$\int_0^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi = \frac{\pi}{2}$ を用いた。こうして、

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

が得られる。この導出過程から分かるように、静電ポテンシャルの関数形は空間の次元数に強く依存する。どのように依存するかについては、各自の研究課題としておこう。