■第 1 回（連立微分方程式）

1　1 階連立微分方程式

独立変数を x あるいは t とする n 個の従属変数 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ についての 1 階連立微分方程式

$$
\begin{aligned}
y_1' &= F_1(y_1, \ldots, y_n; f_1)\\
y_2' &= F_2(y_1, \ldots, y_n; f_2)\\
&\vdots\\
y_n' &= F(y_1, \ldots, y_n; f_n)
\end{aligned}
$$

を考える。ここで、$F_1, \ldots, F_n$ と $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ は与えられた既知関数である。特に、右辺が $y_j(x),\ j = 1, \ldots, n$ について線形である場合、この方程式は

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1\\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n
\end{aligned}
$$

のようになり、この形の方程式を 1 階線形連立微分方程式と呼ぶ。特に従属変数の数を強調したい場合には、n 元 1 階線形連立微分方程式と呼ぶ場合も多い。特に各係数 $a_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$ が定数の場合には定数係数 1 階線形連立方程式と呼ぶ。また、$f_j(x) \neq 0$ のとき非同次型、$f_j(x) = 0$ のとき同次型と呼ぶのは通常の微分方程式の場合と同様である。のちに考えるように、線形連立微分方程式は系の安定性の解析等において一般に重要である

以後、記述を簡潔にするために行列表記を導入する場合がある。$y_j(x)$ および $f_j(x)$ を縦に並べたベクトル

$$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)),\ \boldsymbol{f} = {}^t(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

と、係数 a_{ij} を成分にもつ行列 A を用いれば、1 階線形連立微分方程式は

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}$$

のように書くことができる。この行列 A を係数行列と呼ぶ。

この講義では 1 階の連立微分方程式の解法について考察するが、高階の線形微分方程式は 1 階の連立微分方程式に書き直すことができることを注意しておく。

<u>例：</u>　2 階の線形微分方程式 $q'' + q = 0$ は、新たな変数 $p = q'$ を導入すれば、$q' = p,\ p' = -q$ と q, p についての連立微分方程式に書き直すことができる。

一般に、高階の線形微分方程式

$$f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f = g$$

は、$y_1 = f,\ y_2 = f', \ldots, y_n = f^{(n)}$ とおけば

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2\\
y_2' &= y_3\\
&\vdots\\
y_n' &= -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \cdots - a_{n-1} y_n + g
\end{aligned}
$$

のように連立微分方程式の形に書くことができる。ここからわかるように、n 元線形連立微分方程式は n 階の微分方程式と見ることができる。

1.1　1 階線形・定数係数・同次型

定数係数の同次型連立微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の解法を考える。通常の（非連立）1 階線形微分方程式からの類推により、この方程式の解が $\boldsymbol{y} = Ce^{\lambda x}\boldsymbol{v}$ のような形であると仮定してみよう。ここで、C は定数、$\boldsymbol{v}$ は x によらない定数ベクトルである。両辺を微分すれば $\boldsymbol{y}' = \lambda Ce^{\lambda x}\boldsymbol{v}$ であり、一方 $\boldsymbol{v}$ が行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルであれば $A\boldsymbol{y} = Ce^{\lambda x}A\boldsymbol{v} = Ce^{\lambda x}\lambda\boldsymbol{v} = \lambda Ce^{\lambda x}\boldsymbol{v}$ となるので、方程式は満たされることがわかる。したがって、問題は係数行列 A の固有値問題に帰着されるが、固有値に縮退がある場合とない場合では解に質的な違いがあるので、それぞれの場合に分けて考えよう。

1.1.1　固有値に縮退のない場合

まず、係数行列の固有値に縮退がない場合を考えよう。この場合、 連立微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の一般解、つまり微分の階数 n だけ任意定数をもつ解は

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}\boldsymbol{v}_j$$

で与えられることが示せる。ここで λ_j および $\boldsymbol{v}_j$ は n 次正方行列 A の n 個の相異なる固有値および固有ベクトルであり、C_j は n 個の任意定数である。つまり、一般解は係数行列の各固有値に属する固有ベクトルの「方向」を向いた解たちの線形結合である。さらに、$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の初期条件 $\boldsymbol{y}(0) =: \boldsymbol{y}_0$ を満たす特解はただ一つ存在することも示すことができる（解の一意性）。これらの証明は別の機会に譲り、ここでは与えられた方程式をどのように解くかを考えることにしよう。

$\boxed{\text{解法}}$　与えられた方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ に対して、係数行列 A を対角化する：

$$AP = PD,\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ P^{-1}AP = D$$

ここで、P は各固有値 λ_j に属する固有ベクトルを順番に並べた行列である。この P を用いれば

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \ \Leftrightarrow\ P^{-1}\boldsymbol{y}' = P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{y} = D(P^{-1}\boldsymbol{y})$$

となり、$\boldsymbol{z} := P^{-1}\boldsymbol{y}$ とおけば、与えられた方程式は

$$\boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{pmatrix}$$

と変形できる。最後に現れたのは n 個の 1 階線形微分方程式 $z_j' = \lambda_j z_j,\ (j = 1, \ldots, n)$ であり、これは簡単に解けて $\boldsymbol{z}$ が得られる。したがって、$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ のように解が得られる。

<u>例：</u>　連立微分方程式 $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 \end{cases}$ の一般解、および初期条件 $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 3$ を満たす特解を求める。

係数行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ なので、これを対角化する。特性方程式は $|A - \lambda E| = 0 \ \Leftrightarrow\ (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ なので、固有値は $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$ である。それぞれの固有値に属する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ のように求まるので

$$AP = PD \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} 2 & \\ & 3 \end{pmatrix}$$

および $P^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ がわかる。したがって、元の方程式は

$$\boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} z_1' \\ z_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1 \\ 3z_n \end{pmatrix}$$

と等価であり、これは簡単に $\begin{cases} z_1 = C_1 e^{2x} \\ z_2 = C_2 e^{3x} \end{cases}$ と解くことができる。元の変数 $\boldsymbol{y}$ に戻せば、

$$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

のように一般解が求まる。

次に特解を求める。初期条件 $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 3$ を代入すれば、

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = 3 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -4 \end{cases}$$

がわかり、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^{2x} - 4e^{3x} \\ -5e^{2x} + 8e^{3x} \end{pmatrix}$$

のように特解が求まる。

係数行列 A の固有値に縮退がない場合の 1 階線形連立微分方程式は、変数の個数にかかわらず以上のように解くことができる。なお、一般に係数行列の固有値は複素数値を取るので、解は実数値になるとは限らない。ただし、例のような 2 変数方程式のとき、2 つの固有値が互いに共役複素数になる場合には実数解がありうる（演習問題参照）。

■第 2 回

1.1.2　固有値に縮退のある場合

よく知られているように、どのような正方行列も必ず対角化できるとは限らない。

例えば、すでにほぼ対角化された係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ に対して、方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ を考えると、A の固有値は $\lambda_1 = 1$ と $\lambda_2 = 2$ であり、対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ だけなので、対角化の手続きはこれ以上実行不可能である。また、とりあえず得られる解は $\boldsymbol{y} = C_1 e^x \boldsymbol{v}_1 + C_2 e^{2x} \boldsymbol{v}_2$ である。方程式は 3 次なので、もうひとつ「独立」な解があるはずだが、それをどのように探せばよいだろう？

このように、係数行列の固有値に縮退がある場合には、対応した微分方程式の解法にも修正が必要である

$\boxed{\text{準備：Jordan 標準形}}$　3 角行列を「標準化」する。つまり、対角化できないまでも、なるべく扱いやすい形に変形することを考える

<u>例：</u>　$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ の「対角化」を考えると。特性方程式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ (\lambda+1)^2 = 0$$

したがって、固有値は $\lambda = -1$ で最初の例と同様に 2 重縮退していて、固有ベクトルを求めると

$$A\boldsymbol{v}_0 = -\boldsymbol{v}_0 \ \Leftrightarrow\ (A+E)\boldsymbol{v}_0 = 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ a - 2b = 0$$

となり、規格化定数の選び方を除いて $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のように定まる。固有ベクトルはこの $\boldsymbol{v}_0$ だけで、対角化不可能だから、もう一つの独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を見つけて標準化することを考える。固有ベクトルの定義 $(A+E)\boldsymbol{v}_0 = 0$ からの類推で $(A+E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0$ であるような $\boldsymbol{v}_1$ を探そう。[*1]

$$(A+E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ a - 2b = 1$$

であるから、例えば $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれる。この $\boldsymbol{v}_1$ を行列 A の固有値 -1 に属する「一般固有ベクトル」と呼ぶことにする。さて、定義より $A\boldsymbol{v}_0 = -\boldsymbol{v}_0$ および $A\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0$ である。これらの関係式を行列表記すれば、

$$A\ \underbrace{(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1)}_{P} = \underbrace{(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1)}_{P}\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}_1$ は明らかに $\boldsymbol{v}_0$ と独立だから、これら 2 本のベクトルを並べた P は正則行列であり、A は 3 角行列 $J := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と相似（$P^{-1}AP = J$) であることがいえた。

一般に、k 次正方行列 $J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ を Jordan block (Jordan 細胞）と呼ぶことにすると[*2]、任意の正方行列 A は、これらをブロック対角に並べた $J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, k_1) & & \\ & J(\lambda_2, k_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ に相似変形可能であること

[*1] なぜこのように $\boldsymbol{v}_1$ を定義するかというと、両辺に $A+E$ をかけると $(A+E)^2\boldsymbol{v}_1 = (A+E)\boldsymbol{v}_0 = 0$ となるが、計算してみるとわかるように $(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり、矛盾が生じないから。もっと詳しい理由を後で述べる。

[*2] $k = 1$ の場合 $J(\lambda, 1) = (\lambda)$ と定義する。

が示せる。この J のような行列を Jordan 標準形という。今示した例では J がただ一つの Jordan block $J(-1,2)$ だけから成っていた。[*3]

Jordan 標準形を利用して、方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ を解くことを考える。まず、指数関数の Taylor 展開を用いて行列の指数関数を

$$e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n A^n$$

と定義すれば、この方程式の形式的な解がある定数ベクトル $\boldsymbol{v} \neq 0$ を用いて $\boldsymbol{y} = e^{Ax}\boldsymbol{v}$ と書けることに注目する。実際、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}' = \left(E + xA + \frac{1}{2!}x^2A^2 + \cdots\right)'\boldsymbol{v} &= \left(A + xA^2 + \frac{1}{2!}x2A^3 + \cdots\right)\boldsymbol{v} \\ &= A\left(E + xA + \frac{1}{2!}x2A^2 + \cdots\right)\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

のように方程式は満たされている[*4]。次に、A と単位行列 E の可換性により、ある λ に対して $e^{Ax} = e^{E\lambda x}e^{-E\lambda x}e^{Ax} = e^{\lambda x}Ee^{(A-\lambda E)x} = e^{\lambda x}e^{(A-\lambda E)x}$ が成り立つから、形式解は

$$\boldsymbol{y} = e^{\lambda x}e^{(A-\lambda E)x}\boldsymbol{v} = e^{\lambda x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n(A-\lambda E)^n\boldsymbol{v}$$

と変形することができる。

ここで先ほどの例に戻ろう。型式解において、適切なベクトル $\boldsymbol{v}$ を選べば行列の無限級数は有限項で途切れ、具体的な解を与えるはずである。先ほどの考察により、これには 2 重縮退した固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルおよび一般固有ベクトルを利用できる。

(i) $\boldsymbol{v}$ として、固有ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ をとれば $(A-\lambda E)\boldsymbol{v}_0 = 0$ であるから、この場合の解を $\boldsymbol{y}_0$ とすれば、

$$\boldsymbol{y}_0 = e^{\lambda x}\left(E + x(A-\lambda E) + \cdots\right)\boldsymbol{v}_0 = e^{\lambda x}\boldsymbol{v}_0$$

が得られる。

(ii) $\boldsymbol{v}$ として、一般固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ をとれば、$(A-\lambda E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0$ および $(A-\lambda E)^2\boldsymbol{v}_1 = 0$ であるから、この場合の解を $\boldsymbol{y}_1$ とすれば、

$$\boldsymbol{y}_1 = e^{\lambda x}\left(E + x(A-\lambda E) + \frac{1}{2!}x^2(A-\lambda E) + \cdots\right)\boldsymbol{v}_1 = e^{\lambda x}\left(\boldsymbol{v}_1 + x\boldsymbol{v}_0\right)$$

が得られる。

$\boldsymbol{y}_0$ と $\boldsymbol{y}_1$ は明らかに独立であるから、一般解は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = C_0\boldsymbol{y}_0 + C_1\boldsymbol{y}_1 &= C_0e^{-x}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + C_1e^{-x}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\} \\ &= e^{-x}\left\{(C_0 + C_1x)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

のように求まる。

より一般に、微分の階数 n が大きいとき、つまり A の次数が大きいときには、固有値の縮退度も大きい場合が生じる。このようなときに一般固有ベクトルは

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{v}_0 = 0,\ (A-\lambda E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0,\ (A-\lambda E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1, \ldots$$

のように定義されるが、これは

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{v}_0 = 0,\ (A-\lambda E)^2\boldsymbol{v}_1 = 0,\ (A-\lambda E)^3\boldsymbol{v}_2 = 0, \ldots$$

と等価であり、ある k に対して $(A-\lambda E)^k\boldsymbol{v}_{k-1} = 0$ であれば先ほどの解法が適用できる。

実は、任意の正方行列 A は $A = S + N$ のような分解が可能であることが知られている。ここで、S は対角行列に相似な行列、N はある k に対して $N^k = 0$ を満たす行列であり、前者を半単純行列、後者をベキ零行列という。したがって、$(A-\lambda E)^k = 0$ となる k は必ず存在するから、この手続きにより固有値に縮退がある場合の解法が確立できた。

[*3] 対角化可能な行列とは、すべての Jordan block において $k_j = 1$ であるような J と相似な場合に他ならない。

[*4] A が対角化可能な場合には実際これが前節のような解の具体的表示を与える。

■第 3 回

1.2　1 階線形・定数係数・非同次型

非同次項をもつ方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}$ の解法を考える。ここで $\boldsymbol{f} = {}^t(f_1(x), \dots, f_n(x))$ は n 個の既知関数からなるベクトルである。

1.2.1　定数変化法

非同次型の 1 階線形微分方程式の解法においては、定数変化法が有用であった。連立微分方程式の場合にも、まずはこの方法を適用してみよう。

<u>例：</u>　連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' = 2y_1 + 4y_2 + e^{2x} \end{cases}$$

の一般解、および初期条件 $y_1(0) = y_2(0) = 0$ をみたす特解を求める。

まず、同次型の方程式のときと同様に係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ を対角化する。A の固有値は $\lambda_1 = 2$ および $\lambda_2 = 3$ であり、それぞれに属する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ のようにとることができる。したがって、行列 $P := (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ および $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ を用いて、係数行列 A は $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と対角化できる。いつものように $\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$、さらに非同次項からなるベクトルを $\boldsymbol{f} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と定義すれば、方程式は

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f} \;\Leftrightarrow\; P^{-1}\boldsymbol{y}' = P^{-1}APP^{-1}\boldsymbol{y} + P^{-1}\boldsymbol{f} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{z}' = D\boldsymbol{z} + P^{-1}\boldsymbol{f}$$

と変形できる。ここで、$P^{-1}\boldsymbol{y} =: \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ また、$P^{-1}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 2e^x + e^{2x} \\ -e^x - e^{2x} \end{pmatrix}$ である。したがって、解くべき方程式は

$$\begin{cases} z_1' = 2z_1 + e^x + e^{2x} \\ z_2' = 3z_2 - e^x - e^{2x} \end{cases}$$

に帰着する。したがって、同次方程式の一般解は 2 個の任意定数を用いて $z_1 = C_1 e^{2x},\ z_2 = C_2 e^{3x}$ で与えられる。定数変化法を適用して非同次方程式の一般解を求めよう。いつものように $C_1,\ C_2$ を x の関数とみなして、方程式に代入すれば、

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} = 2e^x + e^{2x} \\ C_2' e^{3x} = -e^x - e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = 2e^{-x} + 1 \\ C_2' = -e^{-2x} - e^{-x} \end{cases}$$

が得られる。これは容易に積分できて、

$$\begin{cases} C_1 = -2e^x + x + \tilde{C}_1 \\ C_2 = \frac{1}{2}e^{-2x} + e^{-x} + \tilde{C}_2 \end{cases}$$

のように関数 $C_1,\ C_2$ が求まる。ここで $\tilde{C}_1,\ \tilde{C}_2$ は新たな積分定数である。こうして、$\boldsymbol{z}$ についての一般解は

$$\begin{cases} z_1 = C_1 e^{2x} - 2e^x + xe^{2x} \\ z_2 = C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + e^{2x} \end{cases}$$

であることが分かった。ここで積分定数は改めて $C_1,\ C_2$ と書いた。

次に初期条件を満たす特解を求めよう。条件 $y_1(0) = y_2(0)$ は $z_1(0) = z_2(0) = 0$ に等価であるから、$z_1(0) = C_1 - 2 = 0$ および $z_2(0) = C_2 + \frac{3}{2} = 0$ がわかり、初期条件を満たす特解は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+x)e^{2x} - 2e^x \\ -\frac{3}{2}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + e^{2x} \end{pmatrix}$$

であることがわかる。もとの $y_1,\ y_2$ に戻せば、特解は

$$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ -z_1 - 2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{3x} + (3+x)e^{2x} - \frac{3}{2}e^x \\ 3e^{3x} + (-4-x)e^{2x} + e^x \end{pmatrix}$$

であることがわかった。

以上のように定数変化法が機能することが確かめられたが、方程式の階数が大きい場合に備えて、もう少し系統的な方法を準備しておくことにしよう。

1.2.2 基本行列解

同次方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の独立な解を、$\boldsymbol{y}_j = e^{\lambda_j x}\boldsymbol{v}_j$ とする。ここで A の固有値を λ_j、およびそれらに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_j$ とした。当面、固有値に縮退はないとする。前節までに見たように同次方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{y}_1 + C_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{y}_n = \underbrace{(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)}_{X(x)} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

のように書くことができる。ここで $X(x)$ は独立解を並べた $n \times n$ 行列であり、基本行列解と呼ばれる。例えば、$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ならば、

$$\boldsymbol{y}_1 = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}_2 = e^{3x}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}_3 = e^{5x}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

であるから、これらを並べて $X(x) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3)$ とすればよい。

さて、同次方程式の形式解に現れる行列 e^{Ax} は、基本行列解 $X(x)$ によって

$$e^{Ax} = X(x)X^{-1}(0)$$

と表されることが示せる。これは以降の考察で用いるので証明しておくことにしよう。$X(x)$ の各列 $\boldsymbol{y}_j$ はそれぞれ独立な解であるから、$\boldsymbol{y}_j' = A\boldsymbol{y}_j$ をみたすことは明らかなので、

$$X'(x) = (\boldsymbol{y}_1', \ldots, \boldsymbol{y}_n') = (A\boldsymbol{y}_1, \ldots, A\boldsymbol{y}_n) = A(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) = AX(x)$$

が成り立つ。したがって、行列 $X(x)$ は微分方程式 $X'(x) = AX(x)$ の解行列である。さらに $X(0) = (\boldsymbol{y}_1(0), \ldots, \boldsymbol{y}_n(0))$ であるが、各 $\boldsymbol{y}_j(0)$ は異なる固有値に属する固有ベクトルであるから独立であり、$|X(0)| \neq 0$ がわかる。したがって、$X(0)$ には逆行列 $X(0)^{-1}$ が存在する。一方、以前に見たように行列 e^{Ax} は微分方程式 $\frac{d}{dx}e^{Ax} = Ae^{Ax}$ をみたすので、これもやはり $X'(x) = AX(x)$ の基本行列解にとることができる。さて、2 つの基本行列解 $X(x)$ と $\tilde{X}(x)$ は、ある定数行列 C によって $\tilde{X}(x) = X(x)C$ のような関係にある。なぜなら、$\tilde{X}(x)$ の各列ベクトルはやはり独立であるから、その各列は線形結合 $\tilde{\boldsymbol{y}}_j = c_{1j}\boldsymbol{y}_1 + c_{2j}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_{jn}\boldsymbol{y}_n$ になっている。こうして、

$$\tilde{X}(x) = (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, \tilde{\boldsymbol{y}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{y}}_n) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}}_{=:C} = X(x)C$$

がわかる。以上により、一般に $e^{Ax} = X(x)C$ のような関係が成立することがわかった。ここで $x = 0$ とおいてみると $E = X(0)C \Leftrightarrow C = X^{-1}(0)$ となり、示すべき関係式が成立することがわかる。

■第 4 回

基本行列解 $X(x)$ を用いて、非同次方程式を解くことを考えよう。解くべき方程式は、$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}_j + \boldsymbol{f}$ のようなものであり、非同次項を $\boldsymbol{f} = {}^t(f_1(x), \dots, f_n(x))$ と書いている。先ほど見たように、基本行列解を用いれば同次方程式の解は $\boldsymbol{y} = X(x)\boldsymbol{C}$ のように書ける。ここで $\boldsymbol{C} := {}^t(C_1, \dots, C_n)$ と定数ベクトルを定義した。さて、定数変化法とは同次方程式の一般解に現れる定数 $C_1, C_2, \dots$ を x の関数とみなすものであったから、今定義した定数ベクトルに x 依存性を入れた $\boldsymbol{C}(x) := (C_1(x), \dots, C_n(x))$ を考えて、解を $\boldsymbol{y} = X(x)\boldsymbol{C}(x)$ のように仮定する。これを非同次方程式に代入すれば、

$$\boldsymbol{y}' = X'(x)\boldsymbol{C}(x) + X(x)\boldsymbol{C}'(x) = AX(x)\boldsymbol{C}(x) + \boldsymbol{f}(x)$$

となるが、基本行列解の定義より $X'(x) = AX(x)$ だから、$X(x)\boldsymbol{C}'(x) = \boldsymbol{f}$ をみたす $\boldsymbol{C}$ によって，非同次方程式は解けることがわかる。このような $\boldsymbol{C}(x)$ を求めるために、基本行列解の逆行列を用いれば $\boldsymbol{C}'(x) = X^{-1}(x)\boldsymbol{f}$ となるから、これを積分して

$$\boldsymbol{C}(x) = \int_0^x X^{-1}(x)\boldsymbol{f}(s)ds + \boldsymbol{C}(0) = \int_0^x X^{-1}(x)\boldsymbol{f}(s)ds + X^{-1}(0)\boldsymbol{y}(0)$$

がわかる。ここで $\boldsymbol{y}(0) = X(0)\boldsymbol{C}(0)$ を用いた。また、積分の始点は便宜上 $x = 0$ ととった。

この $\boldsymbol{C}(x)$ を用いて非同次方程式の解は

$$\boldsymbol{y} = X(x)\boldsymbol{C}(x) = \underbrace{X(x)X^{-1}(0)}_{e^{Ax}}\boldsymbol{y}(0) + X(x)\int_0^x X^{-1}(x)\boldsymbol{f}(s)ds$$

と表せる。次に右辺の第 2 項目を e^{Ax} をもちいて書き換えることにすると、

$$X(x) = e^{Ax}X(0),\ (e^{Ax})^{-1} = e^{-Ax} \ \Leftrightarrow\ X^{-1}(x) = X^{-1}(0)e^{-Ax}$$

であるから、

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{Ax}\boldsymbol{y}(0) + e^{Ax}X(0)\int_0^x X^{-1}(0)e^{-As}\boldsymbol{f}(s)ds = e^{Ax}\boldsymbol{y}(0) + e^{Ax}\int_0^x e^{-As}\boldsymbol{f}(s)ds$$

のように非同次方程式の解 $\boldsymbol{y}(x)$ は e^{Ax} とその積分で書けることがわかる。

<u>例：</u> 非同次方程式

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + e^x \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

の、初期条件 $y_1(0) = y_2(0) = 0$ を満たす特解を求めよう。

係数行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルは、それぞれ $\lambda_1 = 1,\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\lambda_2 = 3,\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるから、同次方程式の独立解は $\boldsymbol{y}_1 = e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{y}_2 = e^{3x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のように書けて、基本行列解は $X(z) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = \begin{pmatrix} e^x & -e^{3x} \\ e^x & e^{3x} \end{pmatrix}$ であることがわかる。これから $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ および $X^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ が得られるから、

$$e^{Ax} = X(x)X^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^x & -e^{3x} \\ e^x & e^{3x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^x + e^{3x} & e^x - e^{3x} \\ e^x - e^{3x} & e^x + e^{3x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{3x}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

のように e^{Ax} が得られる。次に非同次項ベクトル $\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いれば、

$$e^{-As}\boldsymbol{f}(s) = \left\{\frac{1}{2}e^{-s}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-3s}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-2s}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって、

$$\int_0^x e^{-As}\boldsymbol{f}(s)ds = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)(e^{-2x} - 1)$$

がわかる。また、初期条件より $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ だから、これらを用いて

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{3x} \\ \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{3x} \end{pmatrix}$$

が求まる。

1.2.3 Laplace 変換による解法

微分方程式の初期値問題に対して Laplace 変換を用いた解法がしばしば使われる。これを見るために、まずは関数の Laplace 変換について考えよう。

Laplace 変換　定義域が $0 \leq t < \infty$ である関数 $f(t)$ に対して、

$$F(s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(t)e^{-ts}dt =: \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$$

を $f(t)$ の Laplace 変換という。積分の形からわかるように、これは $f(t)$ の Fourier 変換の類似と考えられる。この変換を以後 $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ と書くことにする。

Laplace 変換は定積分で定義されているから、積分値が収束しない場合に $F(s)$ は定義不可能である。すぐにわかるように、$F(s)$ の定義域は $f(t)$ の関数形に依存する。これは、たとえば

$$F(s) = \mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

において $F(s)$ の収束領域が $\mathrm{Re}(s-a) > 0$ で与えられることから明らかである。また、Laplace 変換が線形性 $\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{L}(f(t)) + \beta\mathcal{L}(g(t))$ をもつことも定義より明らか。

例：　$f(t) = 1$ の Laplace 変換は

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-ts}dt = -\frac{1}{s}e^{-ts}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & 0 < s \\ \infty & s \leq 0 \end{cases}$$

となる。

例：　$f(t) = e^{at}$ の Laplace 変換は

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\frac{1}{sa}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s-a} & a < s \\ \infty & s \leq a \end{cases}$$

となる。

さて、なぜ Laplace 変換が微分方程式の解法に応用できるのかを考えよう。そのために、関数 $f(t)$ の導関数の Laplace 変換を実行してみると、

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-ts}dt = f(t)e^{-ts}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f'(t)e^{-ts}dt = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) = sF(s) - f(0)$$

となる。つまり、Laplace 変換することにより「微分」が s との積に置き換えられた。以下にみるように、この事実が微分方程式の解法に応用できる。

■第 5 回

$\boxed{\text{逆 Laplace 変換}}$　逆に、与えられた $F(s)$ に対して $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ となるような $f(t)$ を求めることを考えよう。この変換を $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ と書くことにして、逆 Laplace 変換と呼ぶ。前回の例から、$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = e^{at}, \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right) = 1$ であることはすぐにわかる。

Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係と同様に、逆 Laplace 変換も $F(s)$ の積分によって

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

書くことができる。ここで σ はある実数であり、積分路は複素 s 平面の虚軸に平行な直線にとる。実際、ある固定された実数 σ に対して $s = \sigma + ip$ とおけば $ds = idp$ となり、積分路は $p\colon -\infty \to \infty$ で表せるから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+ip)e^{\sigma t+ipt}dp = e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{F(\sigma+ip)}e^{ipt}dp \\
&= e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{p=-\infty}^{\infty} e^{ipt}\underbrace{\int_0^\infty f(t')e^{-(\sigma+ip)t'}dt'}_{\text{Laplace 変換}}\,dp \\
&= e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\int_{p=-\infty}^{\infty} e^{ipt}\underline{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t')e^{-\sigma t'}}_{=:\psi(t')} e^{-ipt'}dt'}\,dp
\end{aligned}$$

と変形できる。ここで σ は $f(t')$ の Laplace 変換が収束するようにとるものとし、$f(t')$ は $\begin{cases} f(t') & 0 \le t' < \infty \\ 0 & t' < 0 \end{cases}$ のように定義されているとする。最後の等式の下線部は $\psi(t')$ の Fourier 変換であるから、Fourier の積分公式によって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds = e^{\sigma t}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\psi(t+0)+\psi(t-0)\right)}_{\text{連続点なら}\psi(t)} = e^{\sigma t}f(t)e^{-\sigma t} = f(t)$$

が示せた。このように $F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$ が複素積分で計算できることはわかったが、実はこの積分はあまり必要ではない。

微分方程式の解法に有用なのは次の事実である。

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \implies \mathcal{L}(-tf(t)) = \frac{d}{ds}F(s)$$

これは実際、

$$\int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}dt = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

のように示せる。したがって、例えば

$$\begin{array}{ccccccc}
e^{at} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \dfrac{1}{s-a} & & \dfrac{1}{s-a} & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} & e^{at} \\
-te^{at} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & -\dfrac{1}{(s-a)^2} & \iff & -\dfrac{1}{(s-a)^2} & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} & -te^{at} \\
 & \vdots & & & & \vdots &
\end{array}$$

が簡単に計算できる。

$\boxed{\text{線形連立微分方程式への応用}}$　さて、Lapalace 変換を線形連立微分方程式の初期値問題に応用してみよう。手続きは以下の通りである。まず微分方程式を Laplace 変換して、対応した代数方程式を得る。この代数方程式は、実際には馴染み深い連立 1 次方程式である。したがって、変換後の代数方程式は標準的な方法で解くことができ、その解を再び逆 Laplace 変換して元の変数に戻せば、それが求める解となる。

$$
\begin{array}{ccc}
\text{線形連立微分方程式} & \xrightarrow{\text{Laplace 変換}} & \text{代数方程式} \\
\downarrow & & \downarrow \text{解く} \\
\text{微分方程式の解} & \xleftarrow[\text{逆 Laplace 変換}]{} & \text{代数方程式の解}
\end{array}
$$

以前の記法を用いて連立微分方程式を $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}$、初期条件は $\boldsymbol{y}(0) =: \boldsymbol{y}_0$ と書く。方程式の両辺を Laplace 変換すれば、その線形性から

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{y}') = \mathcal{L}(A\boldsymbol{y}) + \mathcal{L}(\boldsymbol{f}) \implies s\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{y}_0 = A\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{F}$$

が示せる。ここで $\boldsymbol{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_n(s) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathcal{L}(y_1(x)) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(y_n(x)) \end{pmatrix} = \mathcal{L}(\boldsymbol{y}(x))$、および $\boldsymbol{F}(s) := \mathcal{L}(\boldsymbol{f}(x))$ と定義した。この $\boldsymbol{Y}$ についての代数方程式は $(sE - A)\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{F}(s)$ と書けるから、行列 $sE - A$ が正則であれば、

$$\boldsymbol{Y}(s) = (sE - A)^{-1}(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{F}(s))$$

が求まり、これを逆 Laplace 変換して $\boldsymbol{y}(x) = \mathcal{L}^{-1}(\boldsymbol{Y}(s))$ が得られる。

<u>例：</u>　連立微分方程式

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

の、初期条件 $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$ を満たす特解を求めてみよう。

まず、両辺を Laplace 変換すれば、

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} sY_1(s) - y_1(0) = 2Y_1(s) + Y_2(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ sY_2(s) = -Y_1(s) + 4Y_2(s) \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} (s-2)Y_1(s) - y_2(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ Y_1(s) + (s-4)Y_2(s) = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s-2 & -1 \\ 1 & s-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

のような連立 1 次方程式が得られる。これを解けば、

$$\begin{cases} Y_1(s) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s-3)^2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{s-1} \\ Y_2(s) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s-3)^2} + \dfrac{5}{4}\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

がわかり、逆変換 $\boldsymbol{y} = \mathcal{L}^{-1}(\boldsymbol{Y})$ することによって

$$\begin{cases} y_1(x) = \dfrac{1}{2}xe^{3x} + \dfrac{3}{4}e^{3x} - \dfrac{3}{4}e^x \\[2ex] y_2(x) = \dfrac{1}{2}xe^{3x} + \dfrac{5}{4}e^{3x} - \dfrac{1}{4}e^x \end{cases}$$

のように解が求まる。

2　定性理論

ここまでは線形の連立微分方程式を考えてきたが、現実の自然現象などをモデル化した方程式は一般に非線形である。したがって、非線形の連立微分方程式を考えることがとても重要になる。ここからは線形とは限らない連立微分方程式 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ を考えよう。当分の間、独立変数は時間を意識して t を用いることにする。

さて、実は非線形微分方程式は線形の場合と異なり、一般によく知っている関数によって解くことはできない。しかし、現実には解の具体的な形はそれほ必要ではない場合も多く、むしろ系に安定な状態が存在するかどうかが重要な問題となる。この安定な状態のことを微分方程式の平衡点と呼ぶことにしよう。

<u>例： Lotka-Volterra 方程式</u>　これは被食者・捕食者の生態系を記述するモデルの中で、最も単純かつ重要な方程式である。$x(t)$ を被食者密度、$y(t)$ を捕食者密度とすると、方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

となる。ここで $a, b, c, d > 0$ は定数である。第 1 式の右辺は被食者（小魚）の個体数がそのときの個体数に比例して増加すること、捕食者（サメ）数が多いほど減少することを示す。一方第 2 式はサメの個体数が共食いの結果個体数に比例して減少し、小魚が多いほど増加することを示す。

この系の平衡点は $\dot{x} = \dot{y} = 0$ で定義されるが、その値は

$$\begin{cases} (a - by)x = 0 \\ (-c + dx)y = 0 \end{cases}$$

を満たす点であるから、$(x, y) = (0, 0)$ および $\left(\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}\right) =: (\bar{x}, \bar{y})$ である。平衡点 $(0, 0)$ は自明、つまり小魚もサメも生きていない状況なので、$(\bar{x}, \bar{y})$ について考える。興味があるのは、この平衡点の安定性である。つまり与えられた a, b, c, d にたいして $(\bar{x}, \bar{y})$ は確定するが、この平衡点から少しずれたところから出発したとき $t \to \infty$ で (x, y) がどこに向かうかというところである。もし $\lim_{t\to\infty}(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ である場合、この点を安定な平衡点という。

このような平衡点の安定性の問題は実際重要なので、線型方程式の場合に戻って考えてみよう。

<u>例：</u>　強制振動の方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

を考える。線形非同次方程式であるから、一般解

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\cos 2t \\ \frac{2}{3}\sin 2t \end{pmatrix}$$

はすぐに求まる。

さて、初期条件を与えることにより (C_1, C_2) が決まり、$(x(t), y(t))$ の関数形が完全に確定する。したがって、その後の運動は精密に追えるはずであるが、位置や速度の測定には必ず誤差が伴うから、これは (C_1, C_2) の値を厳密には決められないことを意味する。考えるべきは、このような (C_1, C_2) の値の「ゆらぎ」が解の長時間の振る舞いにどのような影響を与えるかである。例えば、初期条件 $x(0) = 1,\ y(0) = \dot{x}(0) = 0$ を考えると、$(C_1, C_2) = (\dfrac{4}{3}, 0)$ と「確定」し、特解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3}\cos t - \dfrac{1}{3}\cos 2t \\ \\ -\dfrac{4}{3}\sin t + \dfrac{2}{3}\sin 2t \end{pmatrix}$$

となる。これを「真の解」と呼ぼう。次に測定誤差に伴い $C_1,\ C_2$ の値に 10^{-4} 程度のゆらぎが存在するとする。つまり $\frac{4}{3} - 10^{-4} < C_1 < \frac{4}{3} + 10^{-4},\ -10^{-4} < C_2 < 10^{-4}$ であるとする。このとき、$\lim\limits_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ は $\lim\limits_{t\to\infty} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix}$ に「近い」値を取るだろうか？

これを見るために

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 - \dfrac{4}{3})\cos t + C_2 \sin t \\ \\ -(C_1 - \dfrac{4}{3})\sin t + C_2 \cos t \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A\sin(t + \delta_1) \\ B\sin(t + \delta_2) \end{pmatrix}$$

と置いてみると、

$$|A| = \sqrt{(C_1 - \tfrac{4}{3})^2 + C_2^2} \leq \sqrt{2} \times 10^{-4}$$
$$|B| = \sqrt{(C_1 - \tfrac{4}{3})^2 + C_2^2} \leq \sqrt{2} \times 10^{-4}$$

がわかる。つまり、初期条件の誤差を含んだ $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ と、「真の解」$\begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix}$ の差は $t \to \infty$ であっても 10^{-4} 程度であり、いつまでも近い値を保っていることがわかる。これはこの方程式の「真の解」が初期条件のゆらぎに対して安定性をもつことを示している。

このように、解が揺らぎに対して安定であることは、その数理モデルによって現象を解析する場合の信頼性に関わる重要な性質である。

■第７回

平衡点の安定性（不安定性）をどのように判定するかを考える。このためにはまず「安定性」を定義しなければならないが、気持ちとしては「平衡点に近づいた解は近いままを保つ」とすればよい。

定義：

(1) 連立微分方程式 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ の平衡点を $\boldsymbol{a}$ とする ($\Leftrightarrow \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{a}) = 0$)。任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し、

$$|\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{a}| < \delta \ \Rightarrow \ |\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$$

が成り立つとき、平衡点 $\boldsymbol{a}$ は安定（Lyapnov 安定）であるという。（これは任意の時刻で $\boldsymbol{y}(t)$ が $\boldsymbol{a}$ の近くにいるように初期条件を選べるということ。）

(2) 平衡点 $\boldsymbol{a}$ に近づいた解が $t \to \infty$ で $\boldsymbol{a}$ に収束するとき ($\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{a}$)、平衡点 $\boldsymbol{a}$ は漸近安定であるという。（明らかに、安定 $\supset$ 漸近安定　である。）

(3) 平衡点 $\boldsymbol{a}$ が安定でないとき、不安定であるという。

２次元線形系の平衡点　安定、あるいは不安定な平衡点にはさまざまな種類がある。ここでは２次元の同次線形系 $\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}, \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ の平衡点を分類してみよう。

簡単のため係数行列 A が対角化可能な場合を考える。この場合平衡点は明らかに $\boldsymbol{y} = 0$ である。A の固有値を λ_1, λ_2、それぞれに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ とすれば、方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2$$

であり、固有値の値により平衡点 $\boldsymbol{y} = 0$ は以下のように分類できる。

(a)　固有値が実数値で $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ のとき、$\boldsymbol{y}(t) \to 0$ であり漸近安定。このような平衡点を「安定結節点」という。

(b)　固有値が実数値で $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ のとき、$\boldsymbol{y}(t) \to C_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2$ に漸近し不安定。このような平衡点を「鞍点」という。

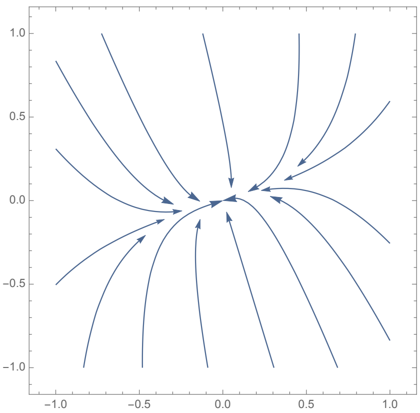
(c)　固有値が実数値で $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ のとき、$|\boldsymbol{y}(t)| \to \infty$ であり不安定。このような平衡点を「不安定結節点」という。

(d)　固有値が複素数値で $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \ \alpha < 0$ のとき $\boldsymbol{y}(t) \to 0$ であり漸近安定。このような平衡点を「渦状点」という。

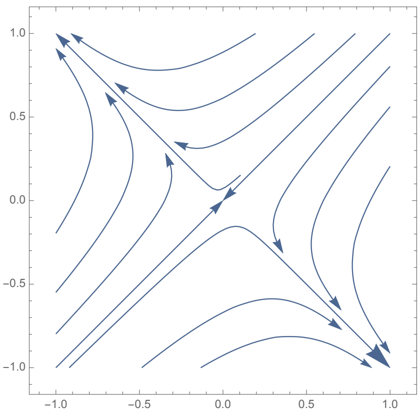
(e)　固有値が複素数値で $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ のとき、$\boldsymbol{y} = 0$ は安定。このような平衡点を「渦心点」という。

(f)　固有値が複素数値で $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \ \alpha > 0$ のとき $|\boldsymbol{y}(t)| \to \infty$ であり不安定。このような平衡点を「不安定渦状点」という。

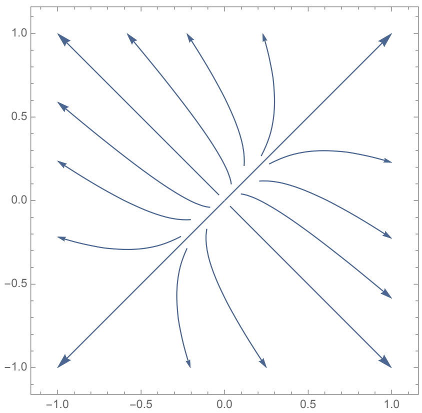
xy-平面上で様々な初期値を始点に取った場合の解の流れを図示すれば、それぞれ以下のようになる。



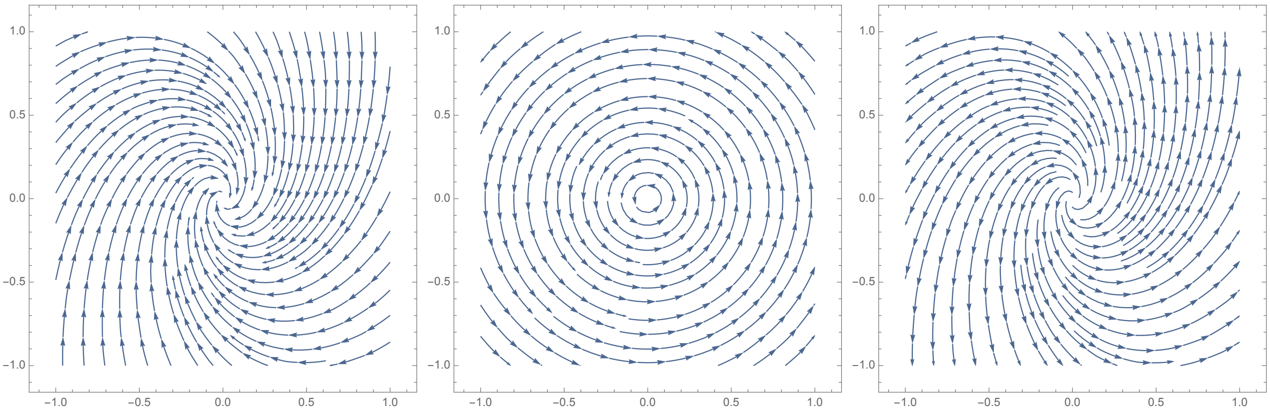
(a) 安定結節点



(b) 鞍点



(c) 不安定結節点



(d) 渦状点　　(e) 渦心点　　(f) 不安定渦状点

なお、係数行列 A の固有値が 0 を含んだり、あるいは対角化できない場合には別のパターンが現れる。

再び非線形連立方程式を考えよう。このような場合にも、平衡点の安定性はその近傍における「線形近似」で解析できることが多い。

例： 非線形方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

を考えよう。この方程式の平衡点 $\dot{x} = \dot{y} = 0$ は、$xy = 1,\ x = y^3$ で与えられるから、$(x, y) = (1, 1)$ および $(-1, -1)$ が平衡点である。それぞれの安定性を見ていこう。

(i) $(x, y) = (1, 1)$ の安定性。平衡点の周りで従属変数を展開すれば

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 1 + v \end{cases}, \quad |u|, |v| \ll 1$$

のようになり、u, v についての方程式は

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{u} = 1 - (1+u)(1+v) = -u - v - uv \simeq -u - v \\ \dot{y} = \dot{v} = (1+u) - (1+v)^3 = u - 3v - 3v^2 - v^3 \simeq u - 3v \end{cases}$$

のように線形方程式に近似できる。ここで u, v について 2 次以上の項は無視した。この線形方程式の係数行列は $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ であるから、固有値を求めると $|A - \lambda E| = (\lambda + 2)^2 = 0$ となり重解 $\lambda = -2 < 0$ となる。したがって、対角化は不可能であるが $u, v \sim e^{-2t}(t$ の多項式$) \to 0$ がわかり、漸近安定である。

(ii) $(x, y) = (-1, -1)$ の安定性。同様に平衡点の周りで従属変数を展開すれば

$$\begin{cases} \dot{u} \simeq u + v \\ \dot{v} \simeq u - 3v \end{cases}$$

となり、係数行列の固有値は $\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{5}$ であることがわかる。したがって、$\lambda_- < 0 < \lambda_+$ であるから、鞍点である。