# 2　特殊関数

## 2.1　Γ-関数、$B$-関数

### 2.1.1　Γ-関数

与えられた自然数 $n$ に対して $n! := n(n-1)\dots 2\cdot 1$ を $n$ の階乗 (factorial) と言う。この積は場合の数の計算などに頻出し、応用上たいへん重要である。なお便宜上 $0! = 1$ と定義する[*1]。

さて、この自然数の階乗を実数あるいは複素数の階乗に一般化したい。実はそのような数を定義しておくと、今後の物理学の考察にとても有用なのである。まずは $n \geq 2$ として次の定積分を考える。部分積分を繰り返せば

$$\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt = -\underbrace{t^{n-1}e^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\ \underbrace{\int_0^\infty e^{-t}dt}_{=1} = (n-1)!$$

がわかる。なお $n=1$ のときは部分積分不要で $\int_0^\infty e^{-t}dt = 1 = 0!$ と書けるから、この定積分公式は $n \geq 1$ で有効である。

ところで、この左辺で $n \to x > 0$ におきかえた $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ を考えると、定積分は $x > 0$ で収束することが示せる。特に $x = n(\geq 1)$ の場合、$\Gamma(n) = (n-1)!$ であるから、$\Gamma(x)$ は階乗の $x \in \mathbb{R}_{>0}$ への一般化と考えて良いだろう。実際、先ほどの部分積分から $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ ($\Leftrightarrow$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$) が成り立ち、これは階乗のもつべき性質 $n! = n\cdot(n-1)!$ を再現している。このように一般化された階乗 $\Gamma(x)$ は Γ-関数と呼ばれ、物理学の様々な場面で顔を出す。

なじみ深い定積分の値はしばしば Γ-関数の特殊値によって与えられる。

**例：**

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ここで $x^2 = t$ のような変数変換を行なった。ところで、左辺は Gauss 積分の半分であるから $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ であり、$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ がわかる。この特殊値はのちに別の方法で示す。

**■Gauss の積公式**　Γ-関数の表示として、次の Gauss の積公式

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

が成立する。

∵)　積分 $\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt$ を考える。ここで $s = t/n$ とおけば、

$$\int_0^1(1-s)^n n^{x-1}s^{x-1}nds = n^x\underbrace{\int_0^1(1-s)^n s^{x-1}ds}_{=:I(x,n)}$$

となるが、$I(x,n)$ は部分積分をくり返せば

$$I(x,n) = \underbrace{(1-s)^n\frac{s^x}{x}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{n}{x}\int 0^1(1-s)^{n-1}s^x ds = \frac{n}{x}I(x+1,n-1) = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}I(x+2,n-2)$$

$$= \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}I(x+n,0)$$

となる。一方、$I(x+n,0) = \displaystyle\int_0^1 s^{x+n-1}ds = \frac{1}{x+n}s^{x+n}\Big|_0^1 = \frac{1}{x+n}$ であるから、

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

が示せた。ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ に注意して、両辺の $n\to\infty$ 極限をとれば、Gauss の積公式が示される。

[*1] 自然数が 0 から始まるか 1 から始まるかという、きのこたけのこ論争のような問題には立ち入らないことにする。

**■Weierstrass の公式**　さらに次の Weierstass の公式が成立する。

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} = \lim_{n\to\infty} e^{-x\log n} x(1+x)(1+\frac{x}{2})\cdots(1+\frac{x}{n})$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-x(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n})} \frac{x\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k})}{e^x e^{x/2}\cdots e^{x/n}} = e^{-x\gamma} x \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+\frac{x}{k}}{e^{x/k}}$$

ここで $\gamma := \lim_{n\to\infty} \log n - (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) \simeq 0.5772$ は Euler 定数である。

### 2.1.2　$B$-関数

次の定積分 $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ を $B$-積分または $B$-関数という[*2]。この $B$-積分は $\Gamma$-関数により、$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ と表せる。

$\because$)　部分積分により

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y dt = \frac{t^x}{x}(1-t)^y\Big|_0^1 + \frac{y}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt = \frac{y}{x}B(x+1,y)$$

となるが、一方

$$B(x,y+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}dt = B(x,y) - B(x+1,y) = B(x,y) - \frac{x}{y}B(x,y+1)$$

であるから、$\frac{x+y}{y}B(x,y+1) = B(x,y)$ がいえる。これを繰り返せば

$$B(x,y) = \frac{x+y}{y}B(x,y+1) = \frac{x+y}{y}\frac{x+y+1}{y+1}B(x,y+2) = \frac{(x+y)\cdots(x+y+n)}{y\cdots(y+n)}B(x,y+n+1)$$

となる。ここで、$t = s/n$ と変数変換すれば

$$B(x,y+n+1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y+n}dt = \frac{1}{n^x}\int_0^n s^{x-1}(1-\frac{s}{n})^{n+y}ds$$

だから、

$$B(x,y) = \frac{(x+y)\cdots(x+y+n)n^y n!}{y\cdots(y+n)n^{x+y}n!}\int_0^n s^{x-1}(1-\frac{s}{n})^{n+y}ds$$
$$= \frac{n^y n!}{y\cdots(y+n)}\frac{(x+y)\cdots(x+y+n)}{n^{x+y}n!}\int_0^n s^{x-1}(1-\frac{s}{n})^{n+y}ds$$

がわかり、右辺で $n\to\infty$ の極限をとればよい。

いろいろな場面で重要な定積分の値は、やはり $B$-関数で与えられることも多い。

**例：**

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

であるが、$t = \sin^2\theta$ とおけば

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

がわかる。ところで、$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi$ なので、再び $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ が示せた。

[*2] $\Gamma$-関数、$B$-関数があるのなら $A$(アルファ)-関数があるのか？という疑問は数学史永遠の謎の一つとして知られている www。

### 2.1.3　Γ-関数のいろいろな性質

Γ-関数は定義により $(i)\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $(ii)\ \Gamma(1)=1$ をみたすが、さらに $(iii)\ (\log\Gamma(x))''\geq 0$、つまり凸関数であることを示すことができる。実は、これら 3 つの性質をもつ関数は Γ-関数に限られることが知られている (Bohr-Mollerup の定理)。

Gauss の公式 $\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ から、$\Gamma(x)$ は $x=-n$ で 1 位の極をもつことがわかる。また、そのときの留数は $(-1)^n/n!$ である。

∵)

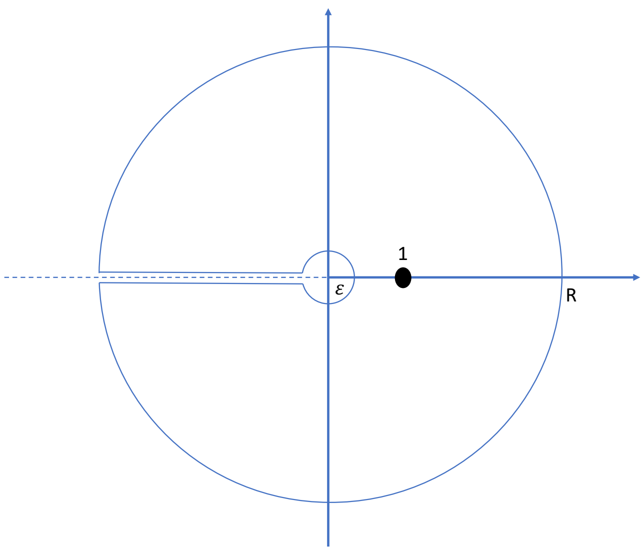
$$(x+n)\Gamma(x)=\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots x}{(x+n-1)\cdots x}\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n-1)\cdots x}\underset{x\to-n}{\longrightarrow}\frac{\Gamma(1)}{(-1)(-2)\cdots(-n)}=\frac{(-1)^n}{n!}$$

**■相補公式**　相補公式と呼ばれる $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ が成立する。ここで $x=1/2$ とすれば再び $\Gamma(1/2)^2=\pi$ がわかる。

∵)　$B$-積分において変数変換 $t=\dfrac{s}{s+1}$ を行うと、

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^\infty\frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x-1}}\frac{1}{(s+1)^{y-1}}\frac{ds}{(s+1)^2}=\int_0^\infty\frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}}ds$$

となるので、$B(x,1-x)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)}=\displaystyle\int_0^\infty\frac{s^{x-1}}{s+1}ds$ を評価する。




補助的な多価関数 $\dfrac{z^{x-1}}{1-z}$ を考える。この関数は $x$ が非整数の場合に原点に分岐点をもつので、branch cut を負の実軸にとって 1 価正則関数とみなし、周回積分する。積分路は図のように、原点を中心にもつ半径 $R$ の円周 $C_R$、$\varepsilon$ の円周 $C_\varepsilon$ 、および負の実軸の上下を往復するものとする。この積分値は留数定理により $z=1$ の留数を拾い $\displaystyle\oint_C\frac{z^{x-1}}{1-z}dz=-2\pi i$ となる。各円周上の積分値は $R\to\infty$ と $\varepsilon\to 0$ の極限で 0 となること、および負の実軸上下を往復する積分値が評価すべき積分になることを利用すると、$-2\pi i=-2i\sin\pi x\,\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ が示せる。

相補公式と Weierstrass の公式を用いれば $\sin\pi x=\pi x\displaystyle\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$ が示せる。これは sin 関数の因数分解であり Euler の公式と呼ばれる。

**■Stirling の公式**　統計力学等において、大きい数の階乗 $\lim_{n\to\infty} n!$ を近似したい場合がある[*3]。これを与えるのが次の Stirling の公式

$$\lim_{x\to\infty}\Gamma(x)\simeq\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$$

である。以下ではこれを導出しよう。

∵)　$\Gamma(x+1)$ の極限形を求めるために、定義式を

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=\int_0^\infty e^{-t+x\log t}dt$$

と書き直せば、被積分関数の $e^{-\phi(t)}$ は $\phi(t)$ の最小値近傍だけで値をもつと考えられる。この最小値を与えるのは $t=x$ であり、この点で Taylor 展開すれば

$$\phi(t)\simeq\phi(x)+\frac{1}{2}(t-x)^2\phi''(x)=x-x\log x+\frac{1}{2}(t-x)^2\frac{1}{x}$$

なので

$$\int_0^\infty e^{-t+x\log t}dt\simeq e^{-x(1-\log x)}\int_0^\infty e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}}dt$$

となる。積分値は Gauss 積分の値で近似すれば、

$$\Gamma(x+1)\simeq e^{x(\log x-1)}\sqrt{2\pi x}=\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$$

が得られる。したがって、$\Gamma(x)=\Gamma(x+1)/x=\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}=:\Gamma_{\mathrm{Stir}}(x)$ が導かれた。

実際に $\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma_{\mathrm{Stir}}(x)}\simeq 1+\varepsilon$ とすれば $x=50$ のとき $\varepsilon\sim 1.6\times10^{-3}$、$x=50000$ のとき $\varepsilon\sim 1.6\times10^{-6}$ 程度である。

[*3] $\lim_{n\to\infty} n!$ は無限大じゃないか！と思ってはいけない。どんな割合で無限大になっていくのかを問題にしているのである。

## 2.2 直交多項式

### 2.2.1 Legendre 多項式

$z$ 軸上の点 $\boldsymbol{a}=(0,0,a)$ に置かれた点電荷 $q$ が、位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ につくる静電ポテンシャルは

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{r}\left(1-2\frac{az}{r^2}+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

に比例する。右辺の平方根の逆数部分を考える。$x:=z/r=\cos\theta$ とおき $t:=a/r$ によって展開すれば[*4]、

$$g(x,t):=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

となる。この $P_n(x)$ は、

$$g(x,t)=\underbrace{g(x,0)}_{P_0(x)=1}+\underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}(x,0)}_{P_1(x)=x}t+\underbrace{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,0)}_{P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)}t^2+\cdots$$

のように $x$ についての $n$ 次多項式になるので、Legendre 多項式と呼ばれる[*5]。また、$g(x,t)$ を Legendre 多項式の母関数という。

**■$P_n(x)$ の一般形**　ここで $P_n(x)$ の一般形を求めるために、これらの満たす漸化式を導出する。母関数を $t$ で微分すれば

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)=-\frac{1}{2}(-2x+2t)(1-2xt+t^2)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\\
\Leftrightarrow\ &(x-t)g(x,t)=(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)t^n-\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n-\sum_{n=1}^{\infty}2xnP_n(x)t^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n
\end{aligned}$$

最後の表式で $n\geq 2$ のとき、$t^n$ の係数を比較すれば

$$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

がわかる。これを用いれば、$P_1$ と $P_2$ から $P_3,\ P_4,\ldots$ が順に得られる。

次に $P_n(x)$ を閉じた形で求めよう。母関数を $t^2-2xt$ によって展開すれば

$$\begin{aligned}
g(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}(2xt-t^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n(2x-t)^n\\
=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k(2x)^{n-k}&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n)!}{2^{2n}n!k!(n-k)!}(2x)^{n-k}t^{n+k}\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{s=0}^{[r/2]}(-1)^s\frac{(2(r-s))!}{2^{2(r-s)}(r-s)!s!(r-2s)!(2x)^{r-2s}}}_{=P_r(x)}t^r
\end{aligned}$$

ここで $(2n-1)!!=(2n)!/2^n n!$ および、無限和の取り方の変更を行なった。また、$[N]$ は $N$ を超えない最大の整数である。最後の結果を整理して、再び $n$ を用いれば、

$$P_n(x)=\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s\frac{(2(n-s))!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!}x^{n-2s}$$

が得られる。

---

[*4] この $x$ はもちろん直交座標の $x$ ではない。改めて別の変数を使うのも経済的ではないので慣例に従って $\cos\theta=:x$ を用いる。ついでに $t$ はもちろん時間変数ではない。

[*5] Legendre 多項式は $P_n$ で表すのが慣わしになっているが、なぜ $L$ ではなく $P$ なのだろう？一つ考えられるのは “The Polynomial”の “P”だが...

**■微分方程式**　Legendre 多項式 $P_n(x)$ の満たす微分方程式を求めよう。母関数を $x$ で微分することにより、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n\geq 0} P_n'(x)t^n \Leftrightarrow\ tg(x,t) = (1-2xt+t^2)\sum_{n\geq 0} P_n'(x)t^n \\
\Leftrightarrow\ \sum_{n\geq 0} P_n(x)t^{n+1} = \sum_{n\geq 0} P_n'(x)t^n - \sum_{n\geq 0} 2xP_n'(x)t^{n+1} + \sum_{n\geq 0} P_n'(x)t^{n+2} \\
\Leftrightarrow\ \sum_{n\geq 1} P_{n-1}(x)t^{n+1} = \sum_{n\geq 0} P_n'(x)t^n - \sum_{n\geq 1} 2xP_{n-1}'(x)t^{n+1} + \sum_{n\geq 2} P_{n-2}'(x)t^{n+2}
\end{aligned}$$

がわかる。各 $t^n$ の係数を比較すれば $n \geq 2$ に対して $P_{n-1} = P_n' - 2xP_{n-1}' + P_{n-2}'$ であり、$n \to n+1$ と置き換えて

$$2xP_n' + P_n = P_{n+1}' + P_{n-1}'$$

が得られる。これと以前求めた漸化式 $(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$ を微分したものを連立させて、

$$P_{n+1}' - P_{n-1}' = (2n+1)P_n$$

がわかり、これらから Legendre の微分方程式

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$$

が導かれる。

## 第 11 回（特殊関数）

**■直交性**　Legendre 多項式は区間 $[-1,1]$ で直交性 $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0,\ (m \neq n)$ をもつ。これを示そう。

まず Legendre の微分方程式 $(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$ は、

$$\underbrace{\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}}_{=:L} P_n = -n(n+1)P_n \ \Leftrightarrow\ LP_n = -n(n+1)P_n$$

と書き直せることに注意する。この $L$ を用いると、任意の関数 $u,\ v$ に対して

$$\begin{aligned} uLv - (Lu)v &= u((1-x^2)v')' - ((1-x^2)u')'v \\ &= (1-x^2)(uv'' - u''v) - 2x(uv' - u'v) = ((1-x^2)(uv' - u'v))' \end{aligned}$$

となるから、$u = P_m$ および $v = P_n,\ (m \neq n)$ とすれば

$$\begin{aligned} P_mLP_n - (LP_m)P_n &= (m(m+1) - n(n+1))P_mP_n \\ &= ((1-x^2)(P_mP_n' - P_m'P_n))' \end{aligned}$$

が得られる。この両辺を区間 $[-1,1]$ で積分すれば、

$$(m(m+1) - n(n+1))\int_{-1}^{1} P_mP_n dx = (1-x^2)(P_mP_n' - P_m'P_n)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

となるが、$m \neq n$ であるから $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$ がわかる。

次に、$m = n$ のとき $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m^2(x)dx = \frac{2}{2m+1}$ を示す。母関数の 2 乗から $\displaystyle\frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{m\geq 0} P_m t^m \sum_{n\geq 0} P_n t^n$ であるが、この両辺を区間 $[-1,1]$ で積分する。右辺は直交性を用いれば、異なる添字の積の部分は 0 となり

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}\int_{-1}^{1} P_m t^m P_n t^n dx = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} t^{m+n}\int_{-1}^{1} P_mP_n dx = \sum_{m\geq 0} t^{2m}\int_{-1}^{1} P_m^2 dx$$

が得られる。一方、左辺は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2} &= -\frac{1}{2t}\log(1-2xt+t^2)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2t}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 = \frac{1}{t}\log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}t^n - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}t^n\right) = \frac{1}{t}\sum_{m\geq 0}\frac{2}{2m+1}t^{2m+1} = \sum_{m\geq 0}\frac{2}{2m+1}t^{2m} \end{aligned}$$

と計算でき、両辺の $t^{2m}$ の係数を比較すれば、

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \delta_{mn}\frac{2}{2m+1}$$

がわかる。以上によって Legendre 多項式 $P_m(x)$ は区間 $[-1,1]$ で直交関数系をなすことがいえた。

■**Legendre 展開**　周期関数が Fourier 級数展開できたのと同様に、区間 $[-1,1]$ で定義された関数 $f(x)$ は Legendre 多項式によって $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_n P_n(x)$ と展開できる[*6]。各係数 $a_n$ は直交関係式から $a_n=\dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$ と決定され、

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{2n+1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f(s)P_n(s)ds\right)P_n(x)$$

と表せる。これを Legendre 展開という。

**例：**　静電ポテンシャルは Laplace 方程式によって決定される。物理系が軸対称性をもつ場合には極座標による変数分離が有効であり、このとき静電ポテンシャルは Legendre 展開によって表される。

対称軸を $z$ 軸にとり、Laplace 方程式 $\triangle\phi=0$ を変数分離すると、分離定数を $n(n+1)$ としてポテンシャルは

$$\phi_n(r,\theta)=\frac{u_n(r)}{r}P_n(\cos\theta)$$

と書ける。ここで $u_n(r)=A_n r^{n+1}+B_n r^{-n}$ である。このとき、$P_n(\cos\theta)$ の満たす微分方程式は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}P_n+n(n+1)P_n=0$$

であり、$x=\cos\theta$ とおけば Legendre の微分方程式に他ならない（電磁気学演習 I 参照)。したがって、軸対称系の静電ポテンシャルは一般に

$$\phi(r,\theta)=\sum_{n\geq 0}A_n r^n P_n(x)+\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(x)$$

のように Legendre 展開されることがわかる。

例えば、原点に電荷 $q$ をもつ半径 $a$ のリングがある場合には $\phi(r=\infty)\to 0 \quad\Leftrightarrow\quad A_n=0$ となり、さらに $\phi(r\sim\infty)\sim\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}$ なので

$$\phi(r,\theta)=\frac{1}{r}\sum_{n\geq 0}C_n\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(x)$$

の形が予想できる。ここで無次元化した動径座標を用いた。

---

[*6] これを主張するには Legendre 多項式の $[-1,1]$ における完備性、つまり Parseval の等式 $||f||^2=\sum_n |a_n|^2$ の成立を証明する必要があるが…。

## 第 12 回（特殊関数）

**■特殊値**　$x = \pm 1, 0$ における Legendre 多項式の値は種々の計算に際して有用である。これらを求めておこう。

母関数 $g(x,t)$ において $x$ を固定する。$x=1$ とすれば、

$$g(1,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n\geq 0} t^n = \sum_{n\geq 0} P_n(1) t^n$$

であり、$P_n(1) = 1$ がわかる。$x=-1$ とすれば、

$$g(-1,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t+t^2}} = \frac{1}{1+t} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n = \sum_{n\geq 0} P_n(-1) t^n$$

であり、$P_n(-1) = (-1)^n$ がわかる。$x=0$ とすれば、

$$g(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} t^{2n}$$

したがって、$P_{2n+1}(0) = 0$ および $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!} = (-1)^n \dfrac{(2n)!!}{(2^n n!)^2} = (-1)^n \dfrac{(2n)!!}{2^{2n}(n!)^2}$ がわかる。

**■偶奇性**　Legendre 多項式は $n$ に応じた偶奇性をもつ。以下のようにこれは母関数の性質からすぐにわかる。

$$g(x,t) = g(-x,-t) = \frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}} = \sum_{n\geq 0} P_n(-x)(-t)^n = \sum_{n\geq 0} \underbrace{(-1)^n P_n(-x)}_{=P_n(x)} t^n$$

したがって、偶数 $n$ に対して $P_n(x) = P_n(-x)$ で偶関数、奇数 $n$ に対して $P_n(x) = -P_n(-x)$ で奇関数である。

**■Rodorigues 公式**　以前求めた Legendre 多項式の一般形は、さらに閉じた形に書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{(2(n-s))!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!} x^{n-2s} = \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{1}{2^n s!(n-s)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2s} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{n!}{s!(n-s)!} x^{2n-2s} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} x^{n-2s} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n
\end{aligned}$$

ここで、微分して 0 になる項を付け加えて $s$ についての和を $[n/2]$ から $n$ に置き換えた。この最後の表式を Legendre 多項式についての Rodorigues の公式という。

**■母関数再び**　Rodorigues 公式から以下のように母関数 $g(x,t)$ を再現することができる。積分路を $x$ を周回する小さな円にとり、導関数の積分表示を用いれば、

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{2^n n!} \oint_C \frac{z^2-1}{(z-x)^{n+1}} dz$$

のように表せる。ここで、両辺に $t^n$ をかけて和をとれば

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} P_n(x) t^n &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{2^n} \oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z-x} \sum_{n\geq 0} \left( \frac{z^2-1}{z-x} \frac{t}{2} \right)^n \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{-2}{t} \oint_C \frac{dz}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)}
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\lambda_\pm = \dfrac{1}{t}\left(1 \pm \sqrt{1-2xt+t^2}\right)$ である。周回積分の極は、$|t| \ll 1$ のとき $|\lambda_+| \gg 1$ および $\lambda_- \sim x$ が示せるから、

$$\oint \frac{dz}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = -\frac{2\pi i}{\lambda_+ - \lambda_-} = -\frac{2\pi i t}{2} \left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}$$

がわかり、母関数が得られた。

このように Legendre 多項式の定義には (i) 母関数、(ii) Rodorigues の公式 、(iii) 微分方程式を用いるものがあり、どの定義も等価であることが示せる。

**■いろいろな直交多項式**　一般に、$X(x) = (x$ の 2 次式)、$\rho(x)$ をある「重み関数」として “Rodorigues 公式” を

$$F_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho(x) X^n\right)$$

とすれば、ある区間 $[a, b]$ において

$$\int_a^b dx \rho(x) F_m(x) F_n(x) \sim \delta_{m,n}$$

つまり、$F_m(x)$ が直交多項式になることが示せる。例えば、$a = -1,\ b = 1,\ X(x) = x^2 - 1,\ \rho(x) = 1$ とすれば、これはここまで見てきた Legendre 多項式である。

積分範囲として無限大も許せば、より一般の直交多項式が得られる[*7]。

**例：** $a = -\infty,\ b = \infty,\ X(x) = -1,\ \rho(x) = e^{-x^2}$ とすれば Hermite 多項式と呼ばれるものが得られる。

**例：** $a = 0,\ b = \infty,\ X(x) = x,\ \rho(x) = e^{-x}$ とすれば Laguerre 多項式と呼ばれるものが得られる。

これらの直交多項式も Legendre 多項式と同様に、母関数表示、Rodorigues の公式、微分方程式による定義が可能であり、それらはそれぞれ等価である。

[*7] では直交多項式は全部でどれくらいあるのかという疑問が湧くと思うので、是非調べてみることをお勧めする。

## 第 13 回（特殊関数）

### 2.2.2　Hermite 多項式

量子力学において非常に重要な Hermite 多項式について考察しよう*8。ここでは 前回紹介した Rodorigues 公式による定義から始めることにする。したがって、考えるべき多項式は

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

である。

**■母関数**　まずは母関数を求めてみよう。やはり正則関数に対する導関数の積分表示

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

を適用すれば、Rodorigues 公式から

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n n! e^{x^2}}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz$$

となる。ここで積分路 $C$ は $z = x$ を囲む小円にとる。両辺に $t^n$ をかけて、正整数 $n$ について総和すれば

$$\begin{aligned} e^{-x^2} \sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} t^n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n t^n}{(z-x)^{n+1}} e^{-z^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{e^{-z^2}}{z-x} \sum_{n\geq 0} \left( \frac{-t}{z-x} \right)^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{e^{-z^2}}{z-x+t} = e^{-(x-t)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで最後の等式では Cauchy の積分公式を用いた。両辺を比較すれば、

$$\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2} =: g(x,t)$$

がわかる。

母関数から、Hermite 多項式の最初の数項を求めてみると、

$$\begin{aligned} g(x,0) = 1 &\Longrightarrow H_0(x) = 1 \\ \left.\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0} = \left.(2x-2t)e^{2xt-t^2}\right|_{t=0} = 2x &\Longrightarrow H_1(x) = 2x \\ \left.\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)\right|_{t=0} = \left.(4(x-t)^2-2)e^{2xt-t^2}\right|_{t=0} = 4x^2-2 &\Longrightarrow H_2(x) = 4x^2-2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

のようになる。

**■漸化式**　直交多項式は一般に 3 項関係式をみたし、Hermite 多項式については

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

が成立する。

$$\because) \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \underline{(2x-2t)e^{2xt-t^2}} = \sum_{n\geq 1} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n$$

下線部は

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2xH_n(x)}{n!} t^n - 2\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{2xH_n(x) - 2nH_{n-1}}{n!} t^n$$

となるから、両辺を比較すれば関係式は成立する。

---

*8　量子力学を勉強したことがあるかどうかは、この Hermite 多項式を触ったことがあるかないかとほぼ同値である。

さらに、

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

が成立する。

$$\because)\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \underline{2te^{2xt-t^2}} = \sum_{n\geq 0}\frac{H_n'(x)}{n!}t^n \sum_{n\geq 0}\frac{H_{n+1}(x)}{n!}t^n$$

となるが、下線部は

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{2H_n(x)}{n!}t^{n+1} = \sum_{n\geq 1}\frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n = \sum_{n\geq 0}\frac{2nH_{n-1}(x)}{n!}t^n$$

のように変形できて、$t^n$ の係数を比較すれば良い。

**■特殊値**　原点 $x=0$ における Hermite 多項式の値は、母関数から

$$g(0,t) = e^{-t^2} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(-t^2)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{H_n(0)}{n!}t^n$$

なので、

$$H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!},\ H_{2n+1}(0) = 0$$

がすぐにわかる。

**■偶奇性**　同様に、母関数の定義より

$$g(x,t) = g(-x,-t) \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}\frac{H_n(x)}{n!}t^n = \sum_{n\geq 0}\frac{H_n(-x)}{n!}(-t)^n$$

であるから、$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$ がわかる。したがって、Hermite 多項式も $n$ に応じた偶奇性をもつ。

**■微分方程式**　以上 2 つの漸化式より $H_{n+1} = 2xH_n - H_n'$ はすぐにわかるが、これを微分すれば

$$\underbrace{H_{n+1}'}_{=2(n+1)H_n} = 2xH_n' + 2H_n - H_n''$$

したがって Hermite の微分方程式

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

が成立する。この方程式は量子力学的調和振動において極めて重要な役割を果たす。

ここから、Hermite 多項式の直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)dx = 0,\ (m\neq n)$$

が示される。

**第 14 回（特殊関数）**

## 2.3 Bessel 関数

2 次元極座標系 $(r,\phi)$ または 3 次元円筒座標系 $(r,\phi,z)$ における Helmholtz 方程式（Laplace 方程式）$(\triangle + k^2)\psi(r,\phi) = 0$ の変数分離 $\psi = R(r)\Phi(\phi)$ を考えよう。通常の手続きで、分離定数を $m^2$ とすれば

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\Phi + m^2\Phi = 0$$

$$\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r} + k^2r^2 - m^2\right)R = 0$$

が得られる。最初の方程式は簡単に解くことができ、解の 1 価性から $m \in \mathbb{Z}$ が決まる。一方、2 番目の方程式において $\rho := kr$ と変数変換すれば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + 1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R(\rho) = 0$$

が得られる。これを Bessel の微分方程式という。

Bessel の微分方程式の解を構成するために、次の母関数

$$g(x,t) := \exp\left(\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})\right) = \sum_{t\in\mathbb{Z}} J_n(x)t^n$$

を考える。右辺は $t$ の負べきも含んだ Laurent 展開であることに注意しよう。左辺は

$$e^{xt/2}e^{-xt/2} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^r t^r \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\left(\frac{x}{2}\right)^s t^{-s}$$

のように展開されるが、$n := r - s$ とおき二重和をとる変数を改めて $(r,s)$ から $(n,s)$ に変更すれば、各変数の変域は

$$\begin{array}{c|cccc} r & 0, & 1, & 2, & \ldots \\ s & 0, & 1, & 2, & \ldots \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc} n & -s, & -s+1, & -s+2, & \ldots \\ s & 0, & 1, & 2, & \ldots \end{array}$$

のようになる。明らかに $n$ の変域は全ての整数であるから、これを考慮すれば $s$ についての和は $\mathrm{Max}(-n,0) \le s < \infty$ とすればよいことがわかる。したがって、

$$e^{xt/2}e^{-xt/2} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=-s}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}t^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{\sum_{s=\mathrm{Max}}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}\ t^n$$

と書くことができる。ここで $\underbrace{\quad}$ 部分は、$(n+s)! = \Gamma(n+s+1)$ に注意すると $n+s$ が負整数のとき $(n+s)! = \infty$ と解釈できるから、和の下限を 0 にとることができ、

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} =: J_n(x)$$

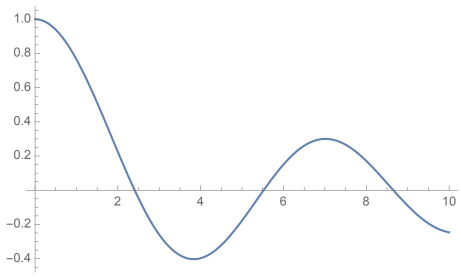
と書いてよい。この $J_n(x)$ を $n$ 次 Bessel 関数と呼ぶ。これらは多項式ではなく無限級数であり、$(n+s)! \to \Gamma(n+s+1)$ と書けば $n$ が非整数 $\nu$ の場合でも有効であることに注意しよう。

いくつかを具体的に書き下すと、

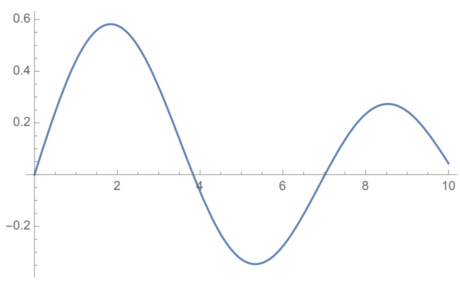
$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \cdots$$

$$J_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(n+s)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$

であり、それぞれのグラフは以下のようになる。




$J_0(x)$




$J_1(x)$

ところで、母関数の性質 $g(x,t)=g(x,-\frac{1}{t})$ から、

$$\sum_n J_n(x)t^n=\sum_n J_n(x)(-1)^n t^{-n}=\sum_n J_{-n}(x)(-1)^n t^n$$

したがって $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$ がわかる。

**■漸化式**　Bessel 関数は多項式ではないが、やはり漸化式を満たすことが知られている。まず、

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)=\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\right)=\sum_n nJ_n(x)t^{n-1}$$

であるが、

$$\begin{aligned}\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\right)&=\frac{x}{2}\sum_n(J_n(x)t^n+J_n(x)t^{n-2})\\&=\frac{x}{2}\sum_n(J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x))t^{n-1}\end{aligned}$$

となるから、

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$$

が成立する。

次に、

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\exp\left(\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\right)=\sum_n J_n'(x)t^{n-1}$$

であるが、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\exp\left(\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\right)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\sum_n J_n(x)t^n&=\frac{1}{2}\sum_n(J_n(x)t^{n+1}-J_n(x)t^{n-1})\\&=\frac{1}{2}\sum_n(J_{n-1}-J_{n+1})t^n\end{aligned}$$

となるので

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$$

が成立する。したがって以上から、例えば $J_0'(x)=\frac{1}{2}(J_{-1}(x)-J_1(x))=-J_1(x)$ 等が成り立つ。

**■微分方程式**　Bessel 関数の満たす微分方程式を求めよう。以上で求めた 2 つの漸化式から、

$$\begin{aligned}J_{n-1}&=\frac{n}{x}J_n+J_n'\\J_{n-1}&=\frac{n}{x}J_n-J_n'\end{aligned}$$

がわかるが、ここから

$$\begin{aligned}x^nJ_{n-1}&=nx^{n-1}J_n+x^nJ_n'=(x^nJ_n)'\\x^{-n}J_{n+1}&=nx^{-n-1}J_n-x^{-n}J_n'=-(x^{-n}J_n)'\end{aligned}$$

が示される。以上を用いれば Bessel 関数は

$$x^2J_n''+xJ_n'+(x^2-n^2)J_n=0$$

を満たすことがわかるが、これは $x\to\rho,\ n\to m$ と置き換えれば、先ほど導出した Bessel の微分方程式に他ならない。

ところで、以上の導出は $n$ を非整数 $\nu$ に置き換えても有効であるから、$\nu$ 次の Bessel 方程式を満たす解は

$$J_\nu(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{\Gamma(\nu+s+1)s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}$$

で与えられることがわかる。