数学と物理学のあいだ

北里大学　理学部　物理
十河 清

（「1995 年度八王子数学ジュニア・セミナー夏の学校」における高校生向け講義レジュメ）

1　はじめに－数学と物理学の関係

この章では数学と物理学の関係について簡単に議論する。一般にこれに対する答えは数学者と物理学者とで異なるであろう。物理学の徒である筆者がこれだと考える回答は、次のディラックの意見である。英語のまま引用するので、読んでみて欲しい。

The steady progress of physics requires for its theoretical formulation a mathematics that gets continually more advanced. This is only natural and to be expected. What, however, was not expected by the scientific workers of the last century was the particular form that the line of advancement of the mathematics would take, namely, it was expected that the mathematics would get more and more complicated, but rest on a permanent basis of axioms and definitions, while actually the modern physical developments have required a mathematics that continually shifts its foundations and gets more abstract. Non-euclidean geometry and non-commutative algebra, which were at one time considered to be purely fictions of mind and pastimes for logical thinkers, have now been found to be very necessary for the description of general facts of the physical world. It seems likely that this process of increasing abstraction will continue in the future and that advance in physics is to be associated with a continual modification and generalisation of the axioms at the base of the mathematics rather than with a logical development of any one mathematical scheme on a fixed foundation.
(P.A.M.Dirac: Quantised Singularities in the Electromagnetic Field, Proc.Roy.Soc.A133(1931)60)

この文章は、有名な「磁気単極子の理論」を展開した論文の冒頭の一節であるが、これを書いたときディラックは 29 才であった。この 3 年前の 1928 年には「相対論的電子の理論」を書き、いわゆるディラック方程式を提出している。これらの業績によって、1933 年にはノーベル物理学賞を受賞することになる。

さて確かに歴史を省みれば、ニュートン以来物理学は数学を応用して来たのではなくて、むしろ数学を作って来たと見ることができる。こう言うと、数学者は直ぐに「整数論」や「群論」は物理学由来ではない、と反論するかも知れない。しかし、口の悪い物理学者は「数学者は自分の作った理論の使い道を知らない」と言うであろう。群論は今や物理学に必須であり、そのうちに整数論もそうなるかも知れない兆候がある。

なにはともあれ、この講義ではニュートン・ライプニッツの完成した「微分積分学」の中から、$\tan^{-1} x$ を題材にして、それが現代の物理学でどのように使われているかを紹介したいと思う。話題は単に微分積分に留まらず、あらゆる数学に拡がっていくのであるが、その一端なりとも興味を持って頂ければ幸いである。次の章では $\tan^{-1} x$ の関係する数学について、第 3 章では $\tan^{-1} x$ の関係する物理学について議論する。最後の章はまとめである。

2　$\tan^{-1} x$ の数学

この章で証明したい公式は、1674 年にライプニッツが提出した次の等式である。

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (|x| \leq 1) \tag{2.1}$$

以下しばらくの間を、これを証明するための準備に費やす。前提となるのは、まず微分の一般的性質についての理解である。

$$(cf)' = cf', \quad (f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg' \tag{2.2}$$

ここで f, g は関数 $f(x), g(x)$ で、$'$ は x に関する微分を表わす。最初の式は「定数倍の微分は微分の定数倍」であること、2 番目は「和の微分は微分の和」になること、最後の式は「積の微分」に関する公式である。

もうひとつの前提は、三角関数の微分についての知識である。

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \sec^2 x \tag{2.3}$$

ここで $\sec x = 1/\cos x$ である（$\sec x$ はセカント・エックスと読む）。

これらは高校の「微分積分」で学ぶのであるが、べき乗の微分 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は知っているが三角関数の微分は未だ習っていないという人がいるかも知れないので、念のため以下に証明しておこう。不等式

$$\sin x < x < \tan x, \qquad (0 < x < \pi/2) \tag{2.4}$$

を使えば

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2.5}$$

が成り立つ。従って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin(h/2)}{h/2} \\ &= \cos x \end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る。ここで三角関数の加法公式 $\sin A - \sin B = 2\cos(A-B)/2 \sin(A+B)/2$ を用いた。同様にして式 (2.3) の残りの式も証明できるが、以下のようにしても良い。

$$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d}{dx} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \tag{2.7}$$

次の $\tan x$ の微分は「積の微分」に関する公式 (2.2) から「商の微分」に関する公式

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} \tag{2.8}$$

を作って、$g = \sin x, f = \cos x$ を代入すればよい。商の微分の公式 (2.8) は $(1/f)' = -f'/f^2$ となることを使えば、$g/f = g \cdot (1/f)$ に積の微分公式を適用して作ることができる。念のために書くと、$(1/f)' = -f'/f^2$ は $f \cdot (1/f) = 1$ の両辺を微分すれば得られる。

以上で三角関数の微分公式 (2.3) が示された。準備が完了したので、いよいよ $\tan^{-1} x$ を登場させよう。$\tan^{-1} x$ はアークタンジェント・エックスと読み、$\tan x$ の逆関数を表わす（arctan$x$ と書くこともある）。すなわち、$y = \tan^{-1} x$ とは $\tan y = x$ のこと（そのタンジェントをとれば x になるような値 y）である。試みに $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描いてみるとよい。

さて $x = \tan y$ の両辺を y に関して微分すると、

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \tag{2.9}$$

を得る。従って、

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \tag{2.10}$$

である。

ここで、いよいよライプニッツの公式 (2.1) の証明に取りかかろう。「積分は微分の逆」を使えば

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} \tag{2.11}$$

という積分公式が得られる。ここで右辺に等式 $1/(1 + x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots (|x| < 1)$ を用いれば

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x &= \int_0^x dx \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} x^{2n+1} \qquad (|x| \leq 1) \end{aligned} \tag{2.12}$$

と、ライプニッツの公式が証明された。

ちょっと、この公式で遊んでみよう。両辺に $x = 1$ を代入すると、$\tan^{-1}(1) = \pi/4$ であるから、等式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \tag{2.13}$$

が成立する。円周率 π が無理数であることはよく知られているが、右辺を有限項で打ち切ると「円周率の有理数近似」が得られる。例えば $n = 10$ までだと、$\pi \sim 47028692/14549535 = 3.23231 \cdots$ を与える。ごらんのように、苦労のわりにあまり収束は良くない。

円周率の高次計算にはいろいろな算法が工夫されているが、$\tan^{-1} x$ を使うものでは

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1}(\frac{1}{5}) - \tan^{-1}(\frac{1}{239}) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1) \cdot 5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1) \cdot 239^{2n+1}} \tag{2.14}$$

などが知られている。これだと、$n = 10$ までとれば小数点以下 16 桁まで正しい値を与える。

おまけとして、もうひとつ $\tan^{-1} x$ の登場する公式を挙げておこう。

$$\tan^{-1} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix} \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{2.15}$$

証明は容易で、$y = \tan^{-1} x$ すなわち $x = \tan y$ を両辺に代入してみればすぐにわかる。ただし、オイラーの式

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y \tag{2.16}$$

と $\ln(e^y) = y$ を使うので、前提として指数関数および対数関数の微分

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{2.17}$$

を必要とする（これらも高校の微分積分で学ぶ)。オイラーの式はこれらを用いて証明できる。

公式 (2.15) の類似物として、次のような公式もおもしろい。$|x| < 1$ のとき、

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

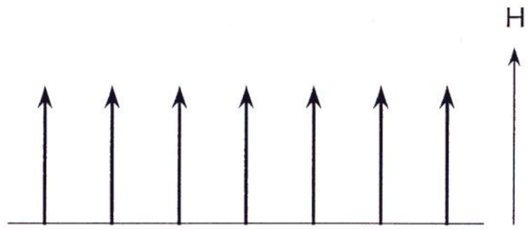
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{2.18}$$

となるから、式 (2.15) によってライプニッツの公式が導出される。実際これは公式の別証明になっている。再びライプニッツの公式が出てきたところで、きりが良いのでこの章を終わることにしよう。

3　$\tan^{-1} x$ の物理学

この章では $\tan^{-1} x$ の持つおもしろい性質が大活躍する、物理学上の問題をひとつ紹介する。それは「１次元磁性体」の問題である。しばらくの間、数学を離れて物理の話をするのだけれども、これがどのように $\tan^{-1} x$ と関係するのかについては、しばらくお待ち願いたい。

$CsNiF_3$（セシウム・ニッケル・フルオライド３）という物質がある。この物質は六方晶系というセレン (Se) やグラファイト（C）に似た結晶構造を持ち、ある方向に１次元的な磁気的秩序を示す磁性体である。そこで、１次元磁性体というのは、例えて言えばたくさんの小さな磁石が直線状に並んだところを想像してもらえばよいだろう。これに外から一様な磁場（磁界）をかけると、個々の磁石の向きがその磁場の方向にそろうようになる。

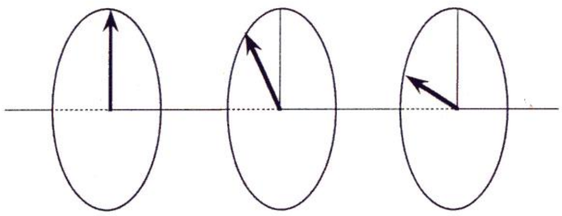


ところで、そもそも物質が磁性を示すのは、物質を構成する原子の中に存在する電子が磁性を有するからである。そして、このことを理論的に明らかにしたのが第１章で引用したディラックに他ならない。彼は相対論的な電子の従う方程式（ディラック方程式）を導出し、その解が自然に磁気的性質（磁気能率）を示すことを明らかにしたのである。電子はよく知られた電気的性質（電荷）を持つだけでなく、それと同時に磁気的性質（磁気能率）も持つ。電子が示すこの性質を「スピン」という。上で例えに使った「小さな磁石」とは、この磁気能率またはスピンのことで、それは大きさと向きを持つベクトルとして表わされる。式で書くと磁気能率 $\overrightarrow{m} = g\mu_B \overrightarrow{S}$ のようにスピン $\overrightarrow{S}$ に比例する。ここで g は g 因子と言い物質固有の定数で、μ_B はボーア磁子という磁気能率の単位である。そこで、前の図は１次元的に並んだ原子の位置にあるスピン・ベクトルを描いたものと考えれば良い。

磁場 $H=0$ の場合、磁性体中のスピンはいろいろな方向に向くことができるが、隣り合ったスピン同士は同じ方向に向く傾向がある。これを「強磁性的交換相互作用」という。$CsNiF_3$ ではその上に、スピンの向きが平面内に束縛される「異方性」を示す。これらをまとめて、$CsNiF_3$ は「1次元容易面型強磁性体」であると言う。言い換えれば、個々のスピン $\overrightarrow{S}_n=(S_n^x,S_n^y,S_n^z)$ の向きに応じて、全エネルギーが

$$E=-J\sum_n \overrightarrow{S}_n\cdot\overrightarrow{S}_{n+1}+A\sum_n (S_n^y)^2-g\mu_B H\sum_n S_n^z \tag{3.1}$$

で与えられるのである。ここに、$J>0$ は交換相互作用エネルギー、$A>0$ は異方性エネルギー、$H>0$ は z 方向にかけられた外部磁場である。スピンが並んだ1次元方向は y 軸、スピンの容易面は xz 平面になっている。$J>0$ なので、隣り合ったスピンは平行になったほうがエネルギー的に得、すなわち強磁性的である。また A が充分に大きいときは、$S_n^y\neq 0$ はエネルギー的に損なので、$S_n^y=0$ すなわちスピン $\overrightarrow{S}_n$ は xz 面内に束縛されるというわけである。



ここで、スピン $\overrightarrow{S}_n$ は1次元方向 n に関してゆっくり変化すると仮定する。これは温度が充分に低ければ妥当な仮定である。このとき、$\overrightarrow{S}_n$ は位置 $y=na$ のなめらかな関数 $\phi(y,t)$ を用いて

$$S_n^y=0,\quad S_n^x=S\sin\phi(y,t),\quad S_n^z=S\cos\phi(y,t) \tag{3.2}$$

と表わされる。ここで a はスピン間の距離、S はスピンの大きさである。

このとき、$\phi(y,t)$ の従う運動方程式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=m^2\sin\phi \tag{3.3}$$

となる。ただし、$c^2=a^2S^2\cdot(2AJ), m^2=g\mu_B H/(JSa^2)$ と置いた。c は速度の、m は質量の次元を有する定数である。式 (3.3) の導出はかなり面倒なのでここでは省略する。じつは、これからの数学的議論は式 (3.3) を出発点にして始めれば充分なのであるが、それでは何故こんな方程式を考えるのかわからないので、物理的な前置きをつけたわけである。

式 (3.3) をサイン・ゴルドン方程式と言う。少し脱線するが、この名前の由来はおもしろくて、元来は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=m^2\phi \tag{3.4}$$

という sin のない線形な方程式をクライン・ゴルドン（Klein-Gordon）方程式と呼んでいた。ちなみに湯川秀樹が最初に提案した「中間子」の従う方程式が、このクライン・ゴルドン方程式である。さて、サイン・ゴルドン方程式というのは、右辺の ϕ が $\sin\phi$ に置き換わったからであるが、たまたま語呂が似ていたクラインは、気の毒に自分の名前を消されてしまったのである。

さて、すべてのスピンが z 軸方向を向いた状態は、式 (3.1) のエネルギーを最低にするが、これは $\phi(y,t)=0$ に対応し、確かに式 (3.3) の解（自明な解！）になっている。これに対して、非線形な偏微分方程式である式 (3.3) の自明でない解を求めるのは、一般に大変困難である。ところが驚くべきことに、以下に見るように、方程式 (3.3) すなわちサイン・ゴルドン方程式は厳密に解くことができる。この際に、$\tan^{-1}x$ が活躍するのである。

小手調べに、最も簡単な特別解を初等的に求めてみよう。いま ϕ が時間 t に依存しないと仮定して、式 (3.3) の解 $\phi=\phi(y)$ を求める。

$$\frac{d^2\phi}{dy^2}=m^2\sin\phi \tag{3.5}$$

の両辺に $d\phi/dy$ をかけると、一回積分できて

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dy}\right)^2=m^2(\cos\phi_0-\cos\phi) \tag{3.6}$$

を得る。ここで積分定数 ϕ_0 は $y=\pm\infty$ で $\cos\phi=1, d\phi/dy=0$ という境界条件を課すると、$\cos\phi_0=1$ としてよい。等式 $1-\cos\phi=2\sin^2(\phi/2)$ を用いれば、上式は開平されて

$$\frac{d\phi}{dy}=\pm 2m\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{3.7}$$

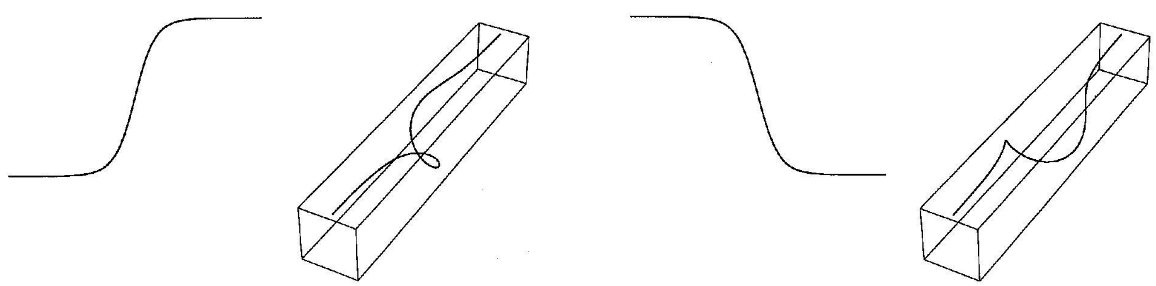
となる。上式に変数変換 $\phi=4\tan^{-1}\tau$ をほどこすと（$\tan^{-1}x$ 登場！）、等式 $d\phi/dy=4(d\tau/dy)/(1+\tau^2), \sin(\phi/2)=2\tau/(1+\tau^2)$ を用いて

$$\frac{d\tau}{dy}=\pm m\tau \tag{3.8}$$

と簡単化される。これは $\tau(y)=e^{\pm m(y-y_0)}$ と、容易に解くことができる。ここに y_0 は積分定数である。結局、サイン・ゴルドン方程式 (3.3) の特別解として

$$\phi(y)=4\tan^{-1}\left(e^{\pm m(y-y_0)}\right) \tag{3.9}$$

が得られた。プラス符号の解をソリトン解、マイナス符号の解を反ソリトン解と呼ぶ。これらを図にすると、以下のようになる。ごらんのように $y=\pm\infty$ の両端では、スピンは z 軸方向を向いているが、途中に「ねじれ」が一回入っている。ねじれの周り方に応じて、ソリトンあるいは反ソリトンというのである。「ソリトン」とは、soliton = solitary wave（孤立波）のことで、自明な解からのずれが空間的に局在しているような解であることを意味している。



一定速度 v で動いている解も、同様に求めることができて、結果は

$$\phi(y,t) = 4\tan^{-1}\left(\exp\left[\pm\frac{m(y-y_0-vt)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]\right) \tag{3.10}$$

となる。

これらの解はすべて、ねじれが一回だけなので、特に「1-ソリトン解」とも言う。その導出は少しややこしかったけれども、ゆっくりと丹念にたどれば高校数学の知識だけで理解できる内容であると思う。是非とも自分の手で計算を確認してもらいたいものである。一方で、磁性体 $\mathrm{CsNiF_3}$ に、このようなソリトン解の状態が実際に存在することは、電子スピン共鳴や中性子散乱という実験手段によって確認されていることを、付け加えておこう。

なんだか手品を見せられたような気がしているかも知れないが、上の解法は一般の場合にも適用できる。以下の記述は少し難しいが、完全を期するために付け加えておく。まず簡単のため、独立変数の変換 $m(y+ct)=2\xi, m(y-ct)=2\eta$ をおこなうと、

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = m^2\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} \tag{3.11}$$

ゆえ、サイン・ゴルドン方程式 (3.3) は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\eta} = \sin\phi \tag{3.12}$$

となる。

式 (3.12) に、変数変換 $\phi = 4\tan^{-1}\tau$ をほどこす。さらに $\tau = g/f$ と置いて、前章の式 (2.15) を用いれば、等式

$$\phi = \frac{2}{i}\ln\frac{f+ig}{f-ig}, \qquad \sin\phi = \frac{4fg(f^2-g^2)}{(f^2+g^2)^2} \tag{3.13}$$

が成り立つから、少し計算した後に、f,g に対する方程式

$$f_{\xi\eta}f - f_\xi f_\eta = g_{\xi\eta}g - g_\xi g_\eta, \qquad f_{\xi\eta}g + g_{\xi\eta}f - f_\xi g_\eta - f_\eta g_\xi = fg \tag{3.14}$$

が得られる。ここに、添字 f_ξ, f_η などは、関数 f の ξ,η に関する微分を意味する。なんだか余計にややこしくなったと思われるかも知れないが、よく見るともとの非線形方程式が、f,g に関して双一次の方程式に簡単化されたことがわかる。この方程式 (3.14) は「広田の双一次方程式」と呼ばれ、簡単に解くことができる。例えば、「2-ソリトン解」は

$$\begin{aligned} g &= \exp\left(p_1\xi + p_1^{-1}\eta + \delta_1\right) + \exp\left(p_2\xi + p_2^{-1}\eta + \delta_2\right), \\ f &= 1 - \left(\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right)^2 \exp\left[(p_1+p_2)\xi + (p_1^{-1}+p_2^{-1})\eta + \delta_1 + \delta_2\right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

と具体的に表わされる。ここで、p_1, p_2 はソリトンの速度に関係したパラメータ、δ_1, δ_2 は積分定数である。この調子で、一般に「$N-$ ソリトン解」までもが具体的に書き表せるのである。

物理の世界に登場する非線形な偏微分方程式で、ソリトン解を持ち厳密に解くことがのできるものが、この他にも多数見つかっている。そして、これらの方程式の示す性質を研究する物理は、まとめて「ソリトン物理学」と呼ばれている。また、これらの非線形方程式の数学を研究する「ソリトンの数理」も、現代数学の重要な一分野に成ってきている。この分野において我が国は、戸田盛和・広田良吾・佐藤幹夫などの先駆的研究を有しているが、将来これらの業績に触れる機会もあるかも知れない。そのときこのノートが何かの役に立てれば幸いである。

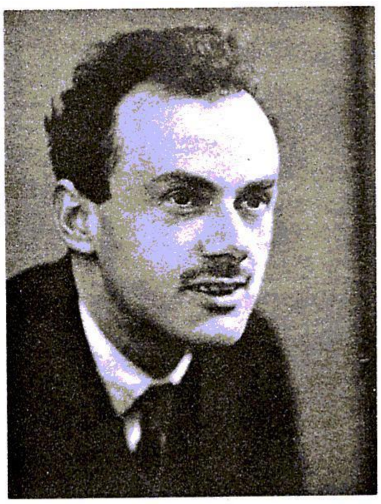
4　まとめ－いま数理物理学になにが起きているのか

この章では、前章で述べた「ソリトンの数理」をその一部として含む数理物理学の世界でいまなにが起きているのかを簡単に紹介して、本講義のまとめに代えたいと思う。専門用語が説明無しに出て来るけれども、お話と思って聞いてもらいたい。若い世代に多いといわれる「やることはもう残っていないのではないか」という考えが誤解であって、たくさんのおもしろい問題が解決を待っていることを感得して頂ければ、充分である。

前章で紹介した「ソリトン物理学」における非線形発展方程式（サイン・ゴルドン方程式）の厳密解は、数理物理学における最近の成果のひとつである。ソリトン方程式が厳密に解くことができるのには、理由がある。この 1960 年代後半に始まった「ソリトン方程式の数理の解明」をきっかけとして、いま数理物理学の世界では、物理学と数学のいろいろな分野にわたってお互いに密接に関係しあいながら、ひとつの大きな「数学」が形成されつつある。

この「数学」は、ソリトン理論、量子可積分系の理論、素粒子の弦理論、無限次元リー代数、代数幾何学、無限次元の確率論などを巻き込んで、いま大きな渦のようなうねりを見せている。まだまだこの先になにが飛び出してくるのか予想もつかない。そして、この新しい数学が全体としてどういう姿になるのかは、未だ研究者の頭の中に漠然と想像されているにすぎないのである。

そんなわけで、この「未完の数学」のもっとも良い「応用」は、素粒子物理学の最終理論（Theory of Everything）と目されている「超弦理論」がそのひとつであると考えられている。その他、固体物理学の分野でも「量子ホール効果」や「高温超伝導」の理論において、その成果が得られつつある。物理学の解明が数学の進展と手をたずさえて進んでいるのである。こうして、あたかも「ニュートン力学」の完成が同時に「微分積分学」の成立でもあったように、物理学上の問題が新しい数学をいま生みつつあるとおもわれるのである。



ディラック（1902–1984）