現象から方程式を創り出す　第?回

ファインマンによるマクスウェル方程式の「証明」

十 河　清

1. はじめに

1948 年 10 月 31 日，コーネル大学の彼の部屋で，ファインマンはプリンストンからやってきたダイソンを前に，ある講義をした。その内容は「粒子に対するいくつかのもっともらしい量子力学的方程式の仮定の下に，マクスウェル方程式を証明・導出する」という驚くべきものであった。

私たちは通常，マクスウェル方程式に限らずニュートン方程式とかシュレーディンガー方程式などいわゆる基礎方程式と呼ばれるものは,「導出される」ものではなく，与えられたものとして「仮定する」ものであると教わる。時には，それらが成り立つ状況証拠についての物理的な議論や，発見法的な推論が提示されることもあるが，それらは数学的な証明とは言い難い。また，作用積分の変分によるオイラー・ラグランジュ方程式として「導出される」こともあるが，この場合には出発点となるラグランジアンを選んだ段階で，方程式は与えられたに等しいとも言える。

ファインマン自身は当時この仕事の価値について否定的で，公表することなく終わってしまった。この仕事が公になったのは，ファインマンの死後にダイソンが「コーネルにおけるファインマン」と題した講演でそのことに触れてからである。[1)] その詳細についての問い合わせの多さに促されて，ダイソンは「Feynman's proof of the Maxwell equations」と題する論文を発表したのである。[2)]

本稿の目的は，第一にこのダイソン論文の内容について紹介・解説すること，第二にこのファインマンの仕事の意義と限界についてのあれこれを議論すること，第三にこれらを通して一風変わった「ゲージ理論再入門」となるような記事を読者に提供することである。

「歴史に『もしも』はない」とはよく言われるのだけれども，もしかするとファインマンはこのとき，後に「ヤン・ミルズ理論」と呼ばれることになる非可換ゲージ理論を発見し損なったのではないか，と筆者は想像するのである。本稿の読了後に，筆者のこの空想にどの程度共感していただけるであろうか。

2. マクスウェル方程式の「証明」

ダイソンによると，当時の講義ノートを紛失してしまったので，文献 2 を書くに際して改めて記憶を辿って再構成したのだという。本稿の基礎となるその文献 2 はしかしながら，現代の電磁気学の記法に沿わないところやミスプリントが散見されるので，以下では断りなく現代風の記法（すなわち MKSA-SI 単位系）に代えて紹介する。

2.1 ファインマンによる証明

質量 m を持つ粒子に対する（量子力学的な）ニュートンの運動方程式

$$（仮定 1）\quad m\ddot{x}_j = f_j(x,\dot{x},t) \qquad (1)$$

から出発する (添字 $j=1,2,3$)。ここで，座標 x，速度 $\dot{x}$ および力 f は量子力学的演算子と考えて，さらに交換関係

$$\text{（仮定２）}\quad [x_j, x_k] = 0 \tag{2}$$

$$\text{（仮定３）}\quad m[x_j, \dot{x}_k] = i\hbar\delta_{jk} \tag{3}$$

を仮定する（$i=\sqrt{-1}$）。このとき，以下の関係式が導かれる，というのがファインマンの発見したことである。すなわち，場 $E(x,t)$，$B(x,t)$ が存在して，力 f はローレンツ力の形式

$$\text{（結論１）}\quad f_j = E_j + \epsilon_{jk\ell}\dot{x}_k B_\ell \tag{4}$$

に書かれる。ここで，２回登場する添字は和を取る，というアインシュタイン規約を採用している。さらに，$E(x,t)$，$B(x,t)$ はマクスウェル方程式

$$\text{（結論２）}\quad \mathrm{div}\ B = 0 \tag{5}$$

$$\text{（結論３）}\quad \mathrm{rot}\ E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

に従う（ダイソンに倣って，この節ではベクトルを太字にしない)。

式 (5) と (6) は４つあるマクスウェル方程式の半分である。残る半分の

$$\mathrm{div}\ E = \rho/\epsilon_0 \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\ B - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 j \tag{8}$$

は，電荷密度 ρ および電流密度 j の**定義式**とみなす。正確に言うと，今の場合の ρ，j は，電荷密度と電流密度のさらに電荷倍である（後出の注３を参照)。これらを「定義式」とするのは少々不満であるが，ともかくそれがファインマンの主張である。なお，$\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ の関係がある（c は光速度）ことは周知であろう。

証明に入る前に，蛇足かもしれない注を読者のためにいくつか付けておく。

注１：(仮定３）に似た交換関係として，運動量 p との間の交換関係

$$[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

は馴染みであろう。早合点な読者は $p = m\dot{x}$ であるから，これらは同じものであると思うかもしれないが，じつはそうではない。今の場合は，一般に $m\dot{x} \neq p$ であり，**速度**との間の交換関係 (3) は以下で本質的な役割をする「自明でない仮定」なのである。

注２：記号 $\epsilon_{jk\ell}$ は３次元の完全反対称テンソルと呼ばれ，添字 j,k,ℓ が全て相異なる場合にのみゼロと異なり，その値は $\epsilon_{123} = +1$ として，添字の順序がその偶置換のときは $+1$，奇置換のときは -1 となる。従って，式 (4) はベクトル積を用いた等式

$$f = E + \dot{x} \times B$$

と同じである。この形のほうが馴染みであろう。

注３：上記のローレンツ力の式には，普通はあるはずの粒子の電荷 e が現れていない。この場合の電荷は E, B の中に含めていると考えるのである（従って，これらは通常の電場や磁束密度のさらに電荷倍の次元を持つ)。さらに言うと，じつは粒子の電荷がゼロの場合でも，これらの（結論１～３）は正しいのである。ただしその場合，E, B は電場と磁束密度という意味は持たない。例えば，通常のポテンシャル力の場合は $E = -\mathrm{grad}\,U$ であるし，コリオリの力の場合は $B = 2m\omega$ で与えられる。これらが方程式 (5) と (6) を満たすことは容易に確認できる。

注４：式 (5) と (6) はランダウ・リフシッツ『場の古典論』では「マクスウェル方程式の第１の組」，式 (7) と (8) は「マクスウェル方程式の第２の組」と呼ばれており，この２組は互いに数学的に異質な性格を持っている。詳しくは次節で述べるが，ファインマンの証明は「上記３つの仮定から第１の組が必然的に導かれる」ことを主張しているのである。

証明の概略

まず式 (3) の両辺を時間 t について微分して（積の微分である)，式 (1) を代入すると

$$[x_j, f_k] + m[\dot{x}_j, \dot{x}_k] = 0 \tag{9}$$

を得る（右辺は定数の微分からゼロ)。

ここで，ヤコビの恒等式

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$$

の成立に注意する。この証明は簡単で，交換子積の定義に従って，例えば第1項は

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] &= A(BC-CB)-(BC-CB)A\\ &= ABC+CBA-ACB-BCA\end{aligned}$$

となる。残り2つも同様に展開すれば，これらが互いに打ち消し合うことが容易にわかる。

そこで $A=x_\ell$, $B=\dot{x}_j$, $C=\dot{x}_k$ と置けば

$$\begin{aligned}&[x_\ell,[\dot{x}_j,\dot{x}_k]]+[\dot{x}_j,[\dot{x}_k,x_\ell]]\\ &\qquad+[\dot{x}_k,[x_\ell,\dot{x}_j]]=0 \quad (10)\end{aligned}$$

を得る。これは，式 (3) と (9) を用いれば

$$[x_\ell,[x_j,f_k]]=0 \qquad (11)$$

を意味する（定数との交換子積はゼロだから）。

一方で，式 (9) において文字 j,k を入れ替えたものを辺々加えると

$$[x_j,f_k]+[x_k,f_j]=0 \qquad (12)$$

を得るから，$[x_j,f_k]$ は添字に関して反対称であることがわかる。よって

$$[x_j,f_k]=-\frac{i\hbar}{m}\,\epsilon_{jk\ell}B_\ell \qquad (13)$$

と書くことができる。式 (13) は，一般に $x,\dot{x},t$ に依存する場の量 B の定義式であるが，式 (11) によれば

$$[x_\ell,B_m]=0 \qquad (14)$$

が成り立つから，実際には B が $\dot{x}$ には依らず x,t のみに依存することがわかる。

こうして磁束密度 $B(x,t)$ が導入された。次は電場 E であるが，こちらは式 (4) すなわち

$$E_j=f_j-\epsilon_{jk\ell}\dot{x}_kB_\ell$$

をもって，その定義式とする。再び，E は一般に $x,\dot{x},t$ に依存する場の量であるが，式 (3), (13), (14) から

$$[x_m,E_j]=0 \qquad (15)$$

を得るので，E も $\dot{x}$ には依らず x,t のみに依存することがわかる。

B の定義である式 (13) は，式 (9) を使えば

$$B_\ell=-\frac{im^2}{2\hbar}\,\epsilon_{jk\ell}[\dot{x}_j,\dot{x}_k] \qquad (16)$$

と書くことができる。実際

$$\epsilon_{jk\ell}B_\ell=-\frac{im^2}{\hbar}[\dot{x}_j,\dot{x}_k]$$

と等式 $\epsilon_{jk\ell}\epsilon_{jk\ell'}=2\delta_{\ell\ell'}$ から式 (16) を得る。

今度はヤコビ恒等式において，$A=\dot{x}_j$, $B=\dot{x}_k$, $C=\dot{x}_\ell$ と置けば

$$\epsilon_{jk\ell}[\dot{x}_j,[\dot{x}_k,\dot{x}_\ell]]=0 \qquad (17)$$

が成り立つ。式 (16) と (17) から

$$[\dot{x}_\ell,B_\ell]=0 \qquad (18)$$

を得る（ℓ について和を取っていることに注意）が，これから式 (5) が導かれる。それには，ある $A(x,t)$ が存在して，式 (3) の $m\dot{x}=p-A$ と書けることに注意すれば良い（A はベクトル・ポテンシャルの電荷倍）。このとき，$p=-i\hbar\nabla$ を使えば

$$m[\dot{x}_\ell,B_\ell]=[-i\hbar\nabla_\ell-A_\ell,B_\ell]=-i\hbar\ \mathrm{div}B$$

だからである。なお，この変形には「落とし穴」がひとつあり，それについては次節で述べる。

残る式 (6) は以下のように導出される。式 (16) の両辺を時間 t に関して全微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B_\ell &= \frac{\partial B_\ell}{\partial t}+\dot{x}_m\frac{\partial B_\ell}{\partial x_m}\\ &= -\frac{im^2}{\hbar}\epsilon_{jk\ell}[\ddot{x}_j,\dot{x}_k] \qquad (19)\end{aligned}$$

となる。ここで式 (1) と (4) を使えば，式 (19) の右辺は以下のように書き直される。このとき，完全反対称テンソル $\epsilon_{jk\ell}$ の性質 $\epsilon_{jk\ell}\epsilon_{jmn}=\delta_{km}\delta_{\ell n}-\delta_{kn}\delta_{\ell m}$ に注意すると変形過程が見やすい。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{jk\ell}[E_j+\epsilon_{jmn}\dot{x}_m B_n,\dot{x}_k] \\
&\quad=-\frac{im}{\hbar}(\epsilon_{jk\ell}[E_j,\dot{x}_k]+[\dot{x}_k B_\ell,\dot{x}_k] \\
&\qquad\qquad -[\dot{x}_\ell B_k,\dot{x}_k]) \\
&\quad=\epsilon_{jk\ell}\ \frac{\partial E_j}{\partial x_k}+\dot{x}_k\frac{\partial B_\ell}{\partial x_k}-\dot{x}_\ell\frac{\partial B_k}{\partial x_k} \\
&\qquad+\frac{im}{\hbar}B_k[\dot{x}_\ell,\dot{x}_k] \qquad (20)
\end{aligned}
$$

ここで，右辺の最後の項は式 (16) により対称性からゼロとなる。また第３項は式 (5) によりゼロとなる。第２項は式 (19) の左辺第２項と同じで，互いに打ち消し合う。以上から

$$
\frac{\partial B_\ell}{\partial t}=\epsilon_{jk\ell}\ \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \qquad (21)
$$

を得るが，これは式 (6) に他ならない。念のためにその確認を書いておこう。例えば $\ell=3$ とすれば，ϵ_{jk3} があるから j,k は $(1,2)$ の組み合わせだけが残る：

$$
\frac{\partial B_3}{\partial t}=\frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=-(\mathrm{rot}\ E)_3
$$

これは式 (6) の第３成分である。**（証明終）**

2.2 ダイソンによる注釈

以上が，ダイソンによるファインマンの証明の再構成である。ごらんのように，電場 E と磁束密度 B のみを使い，ゲージ・ポテンシャルはあらわに登場しない。従って，ゲージ不変性の問題も表面上に現れない証明であることが特徴である。

文献２では，この後にファインマンのこの仕事の動機が「新しい理論の発見」にあった，というダイソンの注釈が続く。それが，マクスウェル方程式導出の成功にも拘らず，何故この仕事を彼が理論的な失敗と考えたのかの理由だというのである。

1948 年当時の時代背景として，湯川の非局所場理論・ボルンの相反理論・ハイゼンベルグの普遍混合理論など，理論物理学のラディカルな再構築の機運が高かった点を考慮しなくてはならない，とダイソンは書いている。

1948 年といえば，ファインマンが彼の量子電磁気学理論（QED）の骨格を完成し，有名な連作論文を執筆していた時期でもある。先発遅延作用とか，経路積分による量子力学の再構成など，彼が理論の最大限の拡張可能性を追求していたことがよくわかる。

「失敗理論である」というファインマン自身の判断に反対して，ダイソンはひとつの問題を提出して文献２を終えている。それは，上記の議論では「ガリレイの相対性に従うニュートン方程式からアインシュタインの相対性に従うマクスウェル方程式が導かれた」かのように見えるが，どうしてそんなことがあり得るのか，というものである。

そこで次節では，以上の議論を相対論的に拡張し，その上で「もしかしたらファインマンは，彼が望んでいた新理論＝非可換ゲージ理論を発見できていたかもしれない」という筆者の想像の根拠を説明しよう。

3. ファインマン理論の意義と限界

3.1 議論の相対論的拡張

前節の議論を相対論的に拡張する。以下では表記の簡単化のために，$\hbar=1, c=1$ の「自然単位」を採用する。なお，$c=1$ は積 $\epsilon_0\mu_0=1$ を意味するだけだが，ついでに個別に $\epsilon_0=\mu_0=1$ であるとしよう。こうすれば，方程式のあちこちに余分なパラメータが現れないで済むからである。必要なときに元の単位系に戻ってこれらのパラメータを復活させるのは，それほど難しくない。

さらに，添字の上付き・下付き，すなわち変数の反変と共変の区別を採用して，相対論的不変性などの対称性の見通しを良くする。例えば，ミンコフスキー時空の反変座標・共変座標はそれぞれ

$$
\begin{cases}
(x^\mu)=(x^0,x^1,x^2,x^3)=(+t,\boldsymbol{x}) \\
(x_\mu)=(x_0,x_1,x_2,x_3)=(-t,\boldsymbol{x})
\end{cases}
$$

で与えられる。すなわち，計量として

$$
(g_{\mu\nu})=(g^{\mu\nu})=\mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)
$$

を採用し

$$
-ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=-dt^2+d\boldsymbol{x}^2 \qquad (22)
$$

とするのである。

以上の準備の下に（仮定１ ～ ３）の相対論的な拡張は（$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$）

$$\text{（仮定１）} \quad m\ddot{x}^\mu = f^\mu \tag{23}$$

$$\text{（仮定２）} \quad [x^\mu, x^\nu] = 0 \tag{24}$$

$$\text{（仮定３）} \quad m[x^\mu, \dot{x}^\nu] = ig^{\mu\nu} \tag{25}$$

となる。ただし，ドット微分は t ではなく，**固有時 s に関する微分**を意味する。このとき例えば，４元速度 $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu$ は

$$(u^\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right)$$

である（$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$）。$u^\mu u_\mu = -1$ に注意。

ファインマンはポテンシャルをあらわに用いなかったが，４元速度 $u^\mu = \dot{x}^\mu$ が４元運動量 p^μ との間で，**ゲージ・ポテンシャル** $A^\mu(\boldsymbol{x}, t)$ を介して

$$m\dot{x}^\mu = p^\mu - eA^\mu \tag{26}$$

の関係があることを使うのが便利である。ここで

$$(p^\mu) = (+\varepsilon, \boldsymbol{p}), \quad (A^\mu) = (+\phi, \boldsymbol{A})$$
$$(p_\mu) = (-\varepsilon, \boldsymbol{p}), \quad (A_\mu) = (-\phi, \boldsymbol{A})$$

である。ただし，本節では通常通りゲージ・ポテンシャル A^μ には電荷 e を含めずに導入した。

相対論的量子力学では，置き換え

$$(p^\mu) = (-i\partial_\mu) = \left(+i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \tag{27}$$

を仮定すれば，交換関係 (25) が満足される。実際

$$[x^0, p^0] = [t, +i\partial/\partial t] = -i$$
$$[x^1, p^1] = [x, -i\partial/\partial x] = +i$$

であり，$m\dot{x}_\mu$ は共変微分 D_μ を用いて $m\dot{x}_\mu = -iD_\mu$ と書ける。ここで，式 (26) より

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu(\boldsymbol{x}, t) \tag{28}$$

である。

このとき，ローレンツ力は４元形式で

$$\text{（結論１）} \quad f^\mu = e\, F^{\mu\nu} u_\nu,$$
$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \tag{29}$$

と書かれる。よって，電磁場の強さ $F^{\mu\nu}$ は，行列形式

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ここで

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\ \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \tag{30}$$

である。念のため，４元ローレンツ力 f^μ を具体的に書いておけば

$$f^0 = \frac{e}{\sqrt{1 - v^2}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{e}{\sqrt{1 - v^2}} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{32}$$

となる。

次に，結論２と結論３であるマクスウェル方程式の第１の組は，非相対論の場合の式 (17) にパラレルなヤコビ恒等式

$$\text{（結論２＆３）} \ \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}[\dot{x}_\nu, [\dot{x}_\rho, \dot{x}_\lambda]] = 0 \tag{33}$$

として表現される。ここで $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ は４次元完全反対称テンソルと呼ばれ，３次元のそれと同様に $\epsilon^{0123} = 1$ とその偶置換は 1，奇置換は -1 で，それ以外はゼロである。既述のように $\dot{x}_\mu$ は $m\dot{x}_\mu = -iD_\mu$ と共変微分で書けるので，式 (33) は

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}[D_\nu, [D_\rho, D_\lambda]] = 0 \tag{34}$$

とも書ける。このような共変微分の場合のヤコビ恒等式は特に「ビアンキ恒等式」とも呼ばれている。式 (28) を使えば

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie\ F_{\mu\nu} \tag{35}$$

であるから，双対場 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \tag{36}$$

によって定義・導入すれば，式 (34) は

$$（結論２\&３）\quad [D_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] = 0 \tag{37}$$

とも書ける。双対場 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ は，式 (36) を具体的に計算すると

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

のようになるので，$F^{\mu\nu}$ と $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を較べて，双対変換 $F \to \tilde{F}$ とは電場と磁束密度の変換 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{B}, -\boldsymbol{E})$ を意味することがわかる。

というわけで，マクスウェル方程式の第１の組の相対論版は，もっとも一般的に式 (37) のように表わされることがわかった。これは $\mu = 0$ のとき，式 (18) に他ならない（$m\dot{x}_\ell = -iD_\ell$，$\tilde{F}^{0\ell} = B_\ell$ であるから）。同様にして，$\mu = 1, 2, 3$ のときは式 (21) を導くことがわかる（例えば $\mu = 1$ のときは $\tilde{F}^{10} = -B_x, \tilde{F}^{12} = -E_z, \tilde{F}^{13} = E_y$ だから）。

かくして，ファインマンはマクスウェル方程式の第１の組の出所がヤコビ・ビアンキ恒等式にあることを正しく見抜いていたと言うことができる。式 (26) のゲージ場の仮定は，３番目の仮定である式 (25)（あるいは式 (3)）の交換関係と本質的に同じであり，このときゲージ場の強さ $\tilde{F}^{\mu\nu}$ は必然的に式 (37) を満たさねばならないのである。

3.2 非可換ゲージ場 – ヤン・ミルズ理論

驚くべきことに，以上の議論は非可換ゲージ場の場合も，**ほとんどそのまま成り立っている**のである。変更点は，ゲージ・ポテンシャル A_μ が一般にゲージ群のリー代数に値を取ること（行列になると思えば良い）と，それゆえ場の強さ $F_{\mu\nu}$ が

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{(-ie)}\,[D_\mu, D_\nu] \\ &= \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - ie[A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \tag{38}$$

のように変更される（右辺の交換子積の項が行列の非可換性のために残る）ことの２点だけである。

従って，ビアンキ恒等式 (34) とか，双対場 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ の定義式 (36) は，そのまま使えて，式 (37) が第１の組のゲージ場方程式となるのである。

繰り返すと，可換ゲージ場であるマクスウェル方程式の場合は $D_\nu = \partial_\nu - ieA_\nu$ に現れるゲージ・ポテンシャル A_ν は $\tilde{F}^{\mu\nu}$ と交換するから，式 (37) は

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{39}$$

と書けるが，非可換の場合はそうではなく

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = ie[A_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] \tag{40}$$

のように右辺が残るのである。

ちなみに，第２の組のゲージ場方程式は，やはり相対論的形式で

$$[D_\nu, F^{\mu\nu}] = j^\mu \tag{41}$$

と書けることに注意しておこう。結局，式 (37) と (41) という互いに相似な方程式系が一般のゲージ場理論における基礎方程式となる。

さて，以上の議論を振り返れば，ファインマンが式 (18) から

$$[\dot{x}_\ell, B_\ell] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0 \tag{42}$$

と結論したところが極めて問題だったことがわかる。もちろん，可換なマクスウェル電磁場の場合はこれで正しいのであるが，そこで立ち止まって別の可能性を考えていれば，と思うのである。

ワイルに始まってシュレーディンガー，ロンドン，クライン，パウリなどの仕事により，非可換ゲージ理論への胎動が始まっていた時代であったから，[3] あり得たかもしれない歴史であると思う。ヤンとミルズが彼らの理論を発表したのは，この６年後の 1954 年のことであった。

参考文献

1) F.J. Dyson, Phys. Today **42** (1989) 32,『ガイアの素顔 – 科学・人類・宇宙をめぐる 29 章』(工作舎)
2) F.J. Dyson, Am. J. Phys. **58** (1990) 209.
3) L. O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton Univ. Press, 1997).

（そごう・きよし，北里大学理学部）